EUGEN GURAN

MATEMATICĂ RECREATIVĂ

JUNIMEA

Eugen Guran

MATEMATICĂ RECREATIVĂ

EUGEN GURAN

MATEMATICĂ RECREATIVĂ

JUNIMEA • 1985

Coperta: GEORGE SCUTARU

PREFAȚĂ

Preocuparea pentru a enunța și rezolva probleme cu caracter recreativ este mult mai veche decît și-o poate imagina cititorul. Probabil că enunțarea unor asemenea probleme s-a împletit cu dezvoltarea teoriei matematicilor, încă de la începuturile ei. Cert este că grecii și arabii, cu mult timp înaintea erei noastre, au gustat din plin savoarea unor asemenea probleme, marea majoritate a celor în circulație azi datînd încă de atunci, sau fiind inspirate de ele.

De-a lungul secolelor, numărul problemelor de acest gen a crescut, o mare parte din ele trecînd în circulația orală, sau — ca o recunoaștere a utilității lor — în manualele școlare. Ele au un grad crescut de dificultate în situația în care se impune condiția de a se recurge la rezolvarea pe calea aritmetică, însă în momentul în care se începe a se stăpîni asemenea raționamente — foarte utile pentru educația unui tineret — în acel moment apar și satisfacțiile de ordin spiritual, sau — dacă vreți — apare recreația intelectuală, rezultată dintr-o gimnastică a minții, la fel de binefăcătoare ca orice gimnastică sau mișcare pentru sistemul care o practică. Și — în plus — apare certitudinea că tînărul care poate conduce asemenea raționamente subtile este apt să abordeze capitolele cele mai spinoase din orice domeniu al științei.

Volumul de față cuprinde o categorie de exerciții și probleme care — în mare parte — prezintă acest fel de particularități legate,

în primul rînd, metoda de rezolvare și, în al doilea rînd, de rezultatele — fie spectaculoase, fie neașteptate — la care se ajunge. În unele cazuri, nici modul în care este formulat enunțul nu scutește cititorul de inedit.

Culegerea se adresează elevilor din școala generală, precum și marelui public, amator de unele incursiuni în domeniul matematicii, oamenilor cu profesiuni și preocupări diferite care, recreîndu-se, se supun, în același timp, unui examen, examinatorii fiind ei înșiși.

În acest scop, am redactat sau am adaptat și cules, din circulația orală, manualele școlare sau diverse publicații, aceste exerciții și probleme, pe care le-am considerat cele mai interesante, recreative și utile în același timp. Pentru a oferi satisfacții rezolvitorilor, am dat întotdeauna rezultatele corecte, iar la marea majoritate a problemelor și metodele de rezolvare — de preferință pe calea aritmetică — neexcluzînd posibilitatea ca, în unele cazuri, să se găsească și alte soluții, poate mai directe, mai spectaculoase ! Astfel de sugestii, din partea cititorilor, vor fi primite cu deosebit interes.

În intenția de a accentua caracterul folositor al acestei lucrări, am inclus și unele probleme și exerciții mai dificile, care solicită mai mult capacitatea de a raționa a cititorului, sau au darul de a fixa mai bine în memorie unele formule care — nerepetate cu o suficientă frecvență — se pot uita.

Culegerea are trei capitole :

— Capitolul I (Probleme diverse — care, se pare, sînt cele mai atractive) cuprinde — în afara problemelor de circulație mai largă : nuferii și lacul, vrăbiile și parii, ograda cu iepuri și găini, jocul de șah etc. — și o serie de probleme mai puțin cunoscute, sau noi : trotuarul rulant, bateria de artilerie, problema comandantului de companie, o premiere în variante, jucătorii de oină, cîntarul fără gradații, media ponderată, biopsihoritmurile, orientarea cu ajuto-

rul soarelui și ceasului, o problemă mai dificilă, autobuzele bucureștene, de-ale Olimpiadei, golgeterul echipei de fotbal, barajul etc.

— Capitolul II (Aritmetica) cuprinde o serie de exerciții în mare parte foarte utile și de aceea demne de memorat (pătratul unui număr care are cifra 5 la unități, idem al celor formate cu cifra 9, sau cu cifra 1, împărțirea cu numere formate din cifra 9 etc.), operațiuni remarcabile prin rezultatele lor, o serie de numere pitagoreice, precum și unele exerciții mai complicate, care se înscriu totuși în nota generală a lucrării.

— Capitolul III (Geometria) încearcă să desprindă unele particularități ale acestei discipline, unele rezolvări care ni s-au părut mai „picante", dintre care menționăm: două triunghiuri echilaterale, bisectoarele într-un paralelogram, pătratul înscris într-un triunghi dreptunghic, cursa pe trasee diferite (semicercuri), scoțianul și topometrul etc. Majoritatea au — predominant — caracterul de util, în special pentru elevi.

În cadrul celor trei capitole, în mod intenționat, nu am ordonat exercițiile și problemele de la „ușor" la „mai greu", în dorința de a nu le da un aspect monoton, fie el chiar crescător și de a oferi cititorului — după exercițiile mai dificile — unele relaxări, pe care le consider binevenite. Am notat însă — în tabla de materii — cu semnul [—] problemele pe care le-am considerat că prezintă un grad mai mic de dificultate în rezolvarea lor și cu [+] pe cele cu un grad ridicat de dificultate; am lăsat, astfel, fără nici o notație specială, problemele cu un grad mediu de dificultate. De aceea, cititorul va fi acela care, parcurgînd tabla de materii și paginile cărții, își va alege singur problemele la care consideră că se poate opri, după voie și nivelul cunoștințelor la care se află. Pentru micii matematicieni însă, recomand să nu ocolească problemele mai dificile ci, studiind cu atenție rezolvările date, să încerce să pătrundă în tainele lor, chiar dacă le este depășit nivelul cunoștințelor. Sînt incursiuni care duc în mod cert la progres.

Și acum, la lucru! Nu înainte de a vă invita să luați creionul și hîrtia și de a face recomandările pe care le repet și pe parcursul culegerii: (1) Încercați mai întîi o rezolvare proprie și numai după aceea apelați la răspunsurile din carte. (2) În situația în care ați apelat totuși la răspunsuri, închideți cartea și rezolvați din nou singuri! (3) Acordați întîietate rezolvărilor pe bază de raționamente (calea aritmetică) și numai după aceea recurgeți la algebră. (4) Eventual, acordați-vă singuri note.

E. G.

CAPITOLUL I – PROBLEME DIVERSE

1 Probleme cu ... „probleme" (I)

Mihai are de rezolvat un număr oarecare de probleme. Dacă ar rezolva cîte 15 probleme pe zi, le-ar termina în N zile. Băiatul nostru este însă mai harnic și, rezolvînd cîte 20 probleme pe zi, le termină cu 4 zile mai devreme, adică în $N—4$ zile.

Cîte probleme are de rezolvat Mihai în total ?

Observație : în loc de „N zile" puteți formula „un număr oarecare de zile".

Răspuns 1 :

În ipoteza că ritmul de rezolvare este 15 probleme pe zi, el are nevoie de 4 zile în plus, în care timp rezolvă $4 \times 15 = 60$ probleme.

În cealaltă ipoteză (20 probleme pe zi), Mihai a rezolvat în afara celor 15 probleme pe zi și aceste 60 probleme în $N—4$ zile, rezolvînd în fiecare zi 5 probleme în plus. Rezultă că $N - 4 = 60 : 5 =$ $= 12$ zile ; iar $N = 16$ zile.

Numărul total de probleme care trebuie să fie rezolvate este :

12 zile $\times$ 20 probleme/zi = 240 probleme (sau 16 zile $\times$ 15 probleme/zi = 240 probleme).

Răspuns 2 :

Cel mai mic multiplu comun al numerelor 15 și 20 (problemele care trebuie rezolvate zilnic în cele două ipoteze) este 60. Pentru a rezolva 60 de probleme, în prima situație are nevoie de $60 : 15 =$ $= 4$ zile, iar în a doua situație de $60 : 20 = 3$ zile. Deci pentru o diferență de o zi (4 zile—3 zile) de lucru, dintre cele două ipoteze, Mihai rezolvă 60 probleme (în fiecare ipoteză). Prin text ni se

arată că diferența de zile dintre cele două ipoteze (variante) de lucru este de 4 zile. Rezultă că numărul total de probleme, pe care le-a avut de rezolvat, este $4 \times 60 = 240$ probleme.

Numărul de zile îl calculăm ușor (240 probleme : 15 probleme/zi = 16 zile; respectiv 240 probleme : 20 probleme/zi = 12 zile).

Răspuns 3:

În fine, să apelăm și la algebră!

Notăm cu Z numărul de zile și vom avea:

$15\,Z = 20(Z - 4)$.

Rezolvînd, rezultă $Z = 16$ zile și, respectiv, $Z - 4 = 12$ zile.

Numărul problemelor este $16 \times 15 = 240$; sau $12 \times 20 = 240$.

2 Probleme cu ... „probleme" (II)

În 20 zile Andrei rezolvă cîte n probleme pe zi. Lucrînd cîte $n + 3$ probleme pe zi, el le termină în 15 zile. Cîte probleme a avut de rezolvat?

Răspuns 1:

În ipoteza doua ($n + 3$ probleme pe zi) elevul rezolvă în 15 zile $3 \times 15 = 45$ probleme în plus față de ipoteza întîi, în aceeași perioadă. Aceste probleme îi rămîn de rezolvat, în prima ipoteză, în cele 5 zile în care lucrează suplimentar. Rezultă că în această primă ipoteză el rezolvă 45 probleme : 5 zile = 9 probleme pe zi; deci în total a rezolvat 9 probleme/zi $\times$ 20 zile = 180 probleme. În ipoteza doua, ritmul de rezolvare zilnic este de $9 + 3 = 12$ probleme, iar numărul total de probleme este evident același (12 probleme/zi $\times$ 15 zile = 180 probleme).

Răspuns 2:

Numărul zilelor necesare pentru rezolvarea problemelor este în raport invers proporțional cu numărul problemelor rezolvate pe zi. Deci:

$$\frac{20}{15} = \frac{n + 3}{n}$$

Ceea ce, de altfel, ne conduce și la soluția algebrică:

$20\,n = 15\,n + 45$

$5\,n = 45$

$n = 9$ probleme pe zi
$N = 9 \times 20 = 180$ probleme

3 Probleme cu ... „probleme" (III)

Un părinte își întreabă copilul:
— Cîte probleme ai rezolvat, Cătălin ?
Acesta răspunde:
— Pînă la ora aceasta am rezolvat 5/7 din numărul total de probleme și mai am de rezolvat 6.

Cîte probleme a avut de rezolvat Cătălin ?

Răspuns:

Reușind să rezolve 5/7 din numărul total de probleme, el nu rezolvase $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ din acest număr. Din text rezultă că, de fapt, nu rezolvase 6 probleme, care corespund fracției $\frac{2}{7}$.

Cum se află valoarea întregului atunci cînd cunoaștem valoarea unei fracții din el ? E foarte simplu: se înmulțește valoarea fracției cu inversul acesteia și avem $6 \cdot \frac{7}{2} = 21$ probleme.

Sau, dacă nu vă aduceți aminte această regulă, putem raționa mai simplu:

$\frac{2}{7}$ reprezintă 6 probleme

$\frac{1}{7}$ reprezintă 3 probleme (de două ori mai puțin)

întregul $\frac{7}{7}$ reprezintă 21 probleme (de șapte ori mai mult)

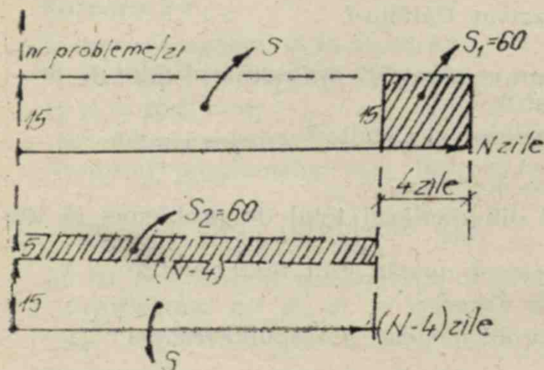
Completare

Pentru primele două probleme cu... „probleme" — (I) și (II) — vom încerca și rezolvări grafice, pe baza raționamentelor de la răspunsurile 1.

Pentru problema (I) recitiți textul și urmăriți graficul!

Pe orizontală (în abscisă), pentru ipoteza 1, luaţi numărul zilelor N, iar pe verticală (ordonată) figuraţi ritmul de rezolvare, adică 15 probleme pe zi.

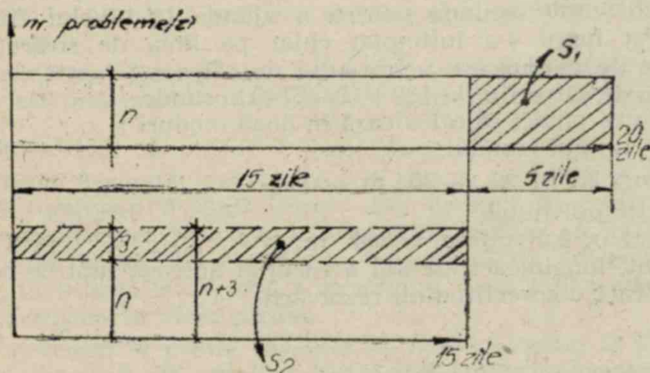
La fel pentru ipoteza 2, construiţi dedesubt un grafic corelat cu primul : pe orizontală veţi lua (N — 4) zile marcînd distinct diferenţa de 4 zile, faţă de mărimea abscisei de sus ; pe ordonată veţi lua 20 probleme pe zi, compus din 15 + 5 = 20 ca în figură, pentru a putea compara cu graficul de sus. Luaţi scări convenabile, arbitrare, dar respectaţi-le în ambele grafice !



Observaţi că numărul total de probleme fiind acelaşi în ambele ipoteze, suprafeţele (inclusiv cele haşurate) din cele două grafice (ipotezele 1 şi 2) sînt egale. Adică 20 (N — 4) = 15 N (nu reţineţi această relaţie, deşi ea ne dă imediat rezolvarea problemei). De asemenea, suprafeţele nehaşurate din grafice, notate cu S, sînt egale, avînd mărimea 15 (N — 4). Rezultă că şi suprafeţele haşurate în cele două grafice sînt egale, deci S 1 = S 2. Dar să facem abstracţie şi de această demostraţie şi să reluăm raţionamentul iniţial, comparînd cele două grafice : în cele 4 zile în plus din ipoteza 1, elevul rezolvă 4 × 15 = 60 probleme (suprafaţa haşurată S 1), pe care — în ipoteza 2 — trebuie să le rezolve în (N — 4) zile, lucrînd în fiecare zi 5 probleme în plus. Rezultă că suprafaţa S 1 haşurată din ipoteza 1 (4 × 15 = 60 probleme) trebuie să fie egală cu aceea haşurată S 2 din ipoteza 2, respectiv cu (N — 4) 5. Priviţi suprafaţa haşurată S 2 din graficul ipotezei 2 (de fapt un dreptunghi) şi remarcaţi că îi cunoaştem mărimea (60 probleme) şi o latură (înălţimea = 5 probleme pe zi) ; cealaltă latură (lungimea) se calculează imediat (60 : 5 = 12 zile) şi reprezintă (N — 4) zile. Dacă N — 4 = = 12 zile, N = 16 zile.

Numărul problemelor nu mai constituie o „problemă" pentru nimeni.

Pentru problema (II) se dau aceleași indicații și schemele de mai jos. Observați că suprafața $S\,1$ este egală cu $S\,2$ (revedeți raționamentele de la răspunsul inițial), iar suprafețele nehașurate din grafice sînt, de asemenea, egale.



Deoarece suprafața dreptunghiului $S\,2 = 3$ probleme/zi $\times 15$ zile $= 45$ probleme, rezultă că și $S\,1 = 45 = 5 \cdot n$, de unde rezultă $n = 9$ probleme pe zi și $n + 3 = 12$ probleme pe zi.

Numărul total de probleme care trebuiau rezolvate este $P = 9 \times 20 = 12 \times 15 = 180$

4. Schiorii.

Doi schiori — tatăl și fiul — organizează o intrecere în familie. Fiul pleacă primul în cursă și coboară cu o viteză medie de 2,6 m/sec. După 10 secunde pleacă și tatăl și coboară cu o viteză medie de 2,8 m/sec. Spre marea satisfacție a restului familiei, ei ajung simultan la linia de sosire. Arbitrul care a consemnat această «perfectă» egalitate era soția și, respectiv, mama concurenților. Dîndu-i crezare, vi se cere să calculați care este lungimea pîrtiei și care au fost cele două timpuri necesare schiorilor pentru a termina cursa ?

Răspuns :

In primele 10 secunde, fiul parcurge $2{,}6 \times 10 = 26$ m. Rezultă că, în realitate, el a avut un avans de 26 m față de tatăl său.

În fiecare secundă, de la plecarea tatălui, ținînd seama de diferența de viteză în avantajul său, acesta recuperează 2,8 — 2,6 = = 0,2 m din distanța care-l separă de fiu. Rezultă că la fiecare 5 secunde această distanță se reduce cu 1 m.

Deoarece el trebuie să recupereze 26 m, înseamnă că are nevoie de 5 × 26 = 130 secunde pentru a ajunge la nivelul fiului său. Cum acest lucru s-a întîmplat chiar pe linia de sosire, rezultă că durata de parcurgere a traseului de către tatăl este de 130 secunde, iar de către fiu de 130 + 10 = 140 secunde.

Lungimea pîrtiei se calculează în două moduri :

După timpul tatălui.

130 sec. × 2,8 m/sec. = 364 m.

După timpul fiului.

140 sec. × 2,6 m/sec. = 364 m.

Evident, lungimea traseului a rezultat aceeași, fapt ce constituie și o verificare a corectitudinii rezolvării.

Note :

a) După ce am făcut observația că în fiecare secundă tatăl recuperează 0,2 m, timpul său rezulta imediat, astfel :

26 m : 0,2 m/sec. = 130 sec.

b) Din rezolvarea problemei a reieșit și o curiozitate aritmetică : produsul a două perechi de numere de ordinul doi (am considerat 13 × 28 și 14 × 26) este egal cu 364. Puteți compune o problemă de matematică recreativă cu acest subiect ?

5. Cu săniuța

Un antrenor pentru sporturile de iarnă are sub îndrumarea sa un grup de tineri dornici să practice astfel de sporturi și dispune de un număr oarecare de săniuțe de două persoane.

La unul din antrenamentele de acomodare cu sania și pîrtia, el distribuie — cum era și normal — cîte doi tineri la o sanie dar — din păcate — observă că opt tineri rămîn fără sanie.

Concluzia este simplă : numărul săniuțelor este insuficient ! Măsura pe care trebuie s-o ia nu-i la fel de simplă, deoarece respectiva bază de antrenament nu mai are nici o sanie bună pentru a intra pe pîrtie.

În această situație, ținînd seama și de faptul că tinerii aveau o greutate corporală mult mai mică decît seniorii, el hotărăște să re-

partizeze cîte trei sportivi la o sanie dar, spre dezamăgirea lui, constată că îi rămîn trei sănii libere.

Cum s-au descurcat mai departe antrenorul și elevii săi nu ne mai interesează ! Dumneavoastră vi se cere să calculați — cu datele de mai sus — numărul tinerilor sportivi și al săniuțelor de la acest antrenament.

Rezolvați mai întîi pe baza raționamentelor aritmetice și după aceea — cei mai mari — apelați și la cunoștințele de algebră !

Răspuns 1 :

În ultima variantă, de repartizare cîte 3 tineri la o sanie, am văzut că rămîneau 3 sănii libere, deci ar mai fi putut participa la antrenament încă 9 sportivi. Vom face ipoteza că împrumutăm acești 9 sportivi de la o altă grupă prezentă la antrenament. În acest fel toate săniile au cîte 3 sportivi și nu a rămas nici o sanie și nici nu sportiv în afara pîrtiei.

Dacă revenim la prima variantă — cîte 2 sportivi la o sanie — cu numărul sporit de sportivi, vor rămîne fără sanie cei 8 (conform textului problemei) plus cei 9 împrumutați, adică în total 17 sportivi.

Să comparăm cele două situații care s-au ivit, în ipoteza cu numărul sportivilor mărit cu 9 :

a) — repartizați cîte 3 la o sanie, sportivii ocupă toate locurile ;

b) — repartizați cîte 2 la o sanie, rămîn 17 sportivi fără sanie.

Faceți supoziția că și în subvarianta b) repartizăm tot cîte 3 sportivi la o sanie ca în subvarianta a), din care 2 sportivi au loc pe sanie, iar cîte 1 sportiv stă alături, în picioare.

Deoarece am văzut că au rămas 17 sportivi fără sanie, adică în picioare, cîte unul lîngă o sanie, rezultă că sînt 17 sănii.

Restituim sportivii împrumutați (cei 9), ca să nu-și piardă programul lor de antrenament, și calculăm în liniște numărul inițial al sportivilor, conform textului problemei (revedeți-l !).

Cîte 2 sportivi la o sanie, înseamnă $2 \times 17 = 34$, la care adăugăm pe cei 8 rămași nerepartizați și rezultă $34 + 8 = 42$ sportivi.

Sau, cîte 3 sportivi la o sanie și 3 sănii neocupate înseamnă $17 - 3 = 14$ sănii și $3 \times 14 = 42$ sportivi.

Deci, avînd și verificarea pentru cele două variante din text, putem răspunde că au fost 42 sportivi și 17 sănii.

Răspuns 2 :

Apelînd la metodele algebrei, vom nota :

x = numărul sportivilor

y = numărul săniilor

Conform textului, ecuațiile sînt :

(1) $2y = x - 8$ (1') $2y + 8 = x$

(2) $3(y - 3) = x$ (2') $3y - 9 = x$

Sistemul de două ecuații cu două necunoscute se rezolvă — în acest caz — foarte ușor, egalînd ecuațiile (1') și (2') Rezultă :

$y = 17$ sănii

$x = 42$ sportivi

6. Ciclismul și viteza medie. [+]

Să ne imaginăm o etapă mai specială într-unul din tururile cicliste ale României ! Și anume una de urcuș și coborîș pe același traseu, de exemplu pe ruta Sinaia — Predeal — Sinaia.

Cîștigătorul acestei etape a urcat de la Sinaia la Predeal cu o viteză constantă de 30 km pe oră și a coborît pe aceeași distanță tot cu o viteză constantă, de 60 km pe oră.

După dușul și premierea de rigoare el este înconjurat de admiratorii și prietenii săi. Felicitîndu-l, unul din aceștia ține să precizeze : „Ai fost formidabil ! Ai obținut o viteză medie, pe întreaga etapă, Sinaia—Predeal—Sinaia, de .... ".

Și el calculează în gînd : 30 + 60 = 90 ; împărțit la 2 rezultă 45 km pe oră. Apoi își completează, cu voce tare, ideea : „de... 45 km pe oră".

Printre admiratori se afla și un elev din clasa a VII-a. Spre regretul său și stupoarea celorlalți, acesta se simte obligat să intervină : „Ceea ce ați calculat dv. nu este viteza medie, ci media vitezelor. Nu confundați una cu alta ! Viteza medie e diferită și cred că e mai mică de 45 km pe oră. În orice caz, ea trebuie calculată".

Cititorul acestor rînduri este invitat să calculeze și el, corect, viteza medie realizată de ciclist.

Răspuns :

În aparență, admiratorul sau prietenul ciclistului avea dreptate.

$$\text{Viteza medie (aparentă)} = \frac{30 + 60}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ km/h.}$$

Dar după calculele tînărului matematician, și sperăm și ale dv., viteza medie reală rezultă conform celor de mai jos

Notăm : distanța Sinaia—Predeal cu D ;

Viteza de urcare $Vu = 30$ km/oră ;

Viteza de coborîre $Vc = 60$ km/oră ;

Timpul necesar pentru urcare va fi :

$$Tu = \frac{D}{Vu} = \frac{D}{30}$$

Timpul necesar pentru coborîre :

$$Tc = \frac{D}{Vc} = \frac{D}{60}$$

$$\text{Viteza medie} = \frac{\text{Distanța Sinaia — Predeal — Sinaia}}{Tu + Tc} =$$

$$= \frac{2D}{Tu + Tc} = \frac{2D}{\frac{D}{30} + \frac{D}{60}} = \frac{2D}{\frac{2D + D}{60}} = \frac{2D}{\frac{3D}{60}} = \frac{2D}{\frac{D}{20}} = \frac{40D}{D} = 40 \text{ km/oră.}$$

După cum se poate observa ușor, viteza medie de 40 km/oră este diferită de media vitezelor de 45 km/oră calculată de amicul ciclistului și anume este mai mică.

Observați, în plus, că pentru aceste calcule nu a fost nevoie să cunoaștem nici distanța D dintre cele două localități și nici timpul necesar parcurgerii ei, într-un sens sau altul.

Și acum, o întrebare suplimentară : puteți arăta că în orice situație viteza medie este mai mică decît media vitezelor ?

După ce încercați o rezolvare proprie, citiți și răspunsul de mai jos !

Răspuns :

Ne situăm în varianta din problema de mai sus : două viteze (medii) diferite realizate pe două distanțe egale. Deci vom lucra cu $V1$ și $V2$ și cu $2D$ și respectiv cu timpurile $T1$ și $T2$.

$$\text{Media celor două viteze} = \frac{V1 + V2}{2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{Viteza medie} = \frac{2D}{T1 + T2} = \frac{2D}{\frac{D}{V1} + \frac{D}{V2}} = \frac{2D}{\frac{D(V1 + V2)}{V1 \cdot V2}} = \frac{2\,V1 \cdot V2}{V1 + V2} \quad (2)$$

Pentru a compara cele două expresii (1) și (2) le vom înmulți pe fiecare cu $\frac{V1+V2}{2}$ și vom avea :

$$(1') \quad \left(\frac{V1+V2}{2}\right)^2 = \frac{V1^2+2\,V1V2+V2^2}{4}$$

$$(2') \quad \frac{2V1\cdot V2}{V1+V2}\cdot\frac{V1+V2}{2} = V1\cdot V2$$

Facem ipoteza că (1') este mai mare decît (2') și avem :

$$\frac{V1^2+2\,V1V2+V2^2}{4} > V1\cdot V2$$

Rezolvînd, rezultă că : $(V\,1 - V\,2)^2 > 0$

Ceea ce este corect (pătratul oricărei expresii este pozitiv). Ipoteza făcută este corectă, deci media vitezelor este mai mare decît viteza medie.

7. Media ponderată (I)

La absolvirea facultății, media generală a unui absolvent se calculează astfel : se face media generală a celor cinci ani de studiu, se înmulțește cu doi, la aceasta se adaugă nota de la diplomă și rezultatul se împarte la trei.

Proaspăta absolventă, Mihaela, a obținut, în final, media generală 9,80. Știind că nota de la diplomă a fost cu 30 sutimi (0,30) mai mare decît media notelor din cei cinci ani de facultate, să se afle media din anii de facultate și nota de la diplomă.

Răspuns :

Punctajul total (suma notei de la proiectul de diplomă, cu de două ori media anilor de facultate) este :

$9,80 \times 3 = 29,40$

Din acesta scădem cele 30 de sutimi cîte a obținut în plus la diplomă :

$29,40 - 0,30 = 29,10$

Împărțind la 3 obținem media anilor de studiu :

$29,10 : 3 = 9,70$

Nota de la diplomă a fost : $9,70 + 0,30 = 10$

8. Media ponderată (II)

În condițiile de la problema precedentă (I), absolventa a obținut media generală 9,40.

Știind că nota de la proiectul de diplomă a fost cu 60 de sutimi (0,60) mai mică decît media notelor din anii de facultăte, să se afle mărimea lor.

Răspuns :

Punctajul total (suma notei de la diplomă cu de două ori media anilor de facultate) este :

$9,40 \times 3 = 28,20$

Din acesta scădem de două ori cele 60 de sutimi cît a avut mai mult la media din facultate și obținem :

$28,20 - 2 \times 0,60 = 27$

Împărțind la 3 obținem nota de la proiectul de diplomă (9).

Iar media din timpul anilor de studiu a fost, conform textului, cu 60 de sutimi mai mare, deci 9,60.

9. Orientarea cu ajutorul soarelui și ceasului. [+]

Dacă aveți ceas — de tip clasic — și vreți să aflați punctele cardinale, într-o zi însorită, procedați astfel :

— îndreptați limba orară a ceasului Dv. către soare, indiferent la ce oră vă aflați ;

— materializați pe teren cu jaloane, sau „trasați“ imaginar unghiul făcut de limba orară a ceasului orientat ca mai sus și semi-dreapta care pornește din centrul ceasului și trece prin punctul care arată ora 12 ;

— duceți, cum vă pricepeți mai bine, bisectoarea acestui unghi și veți găsi punctul cardinal „sud“, sau „miază-zi“ ;

Aflarea celorlalte trei puncte cardinale nu mai este o problemă pentru nimeni !

Faceți o experiență pentru o oră oarecare și demonstrați că procedeul expus mai sus este corect, adică este valabil pentru orice oră din „zi însorită“.

Folosiți-vă atît de cunoștințele geografice, cît și de cele geometrice.

Răspuns :

Știm că pămîntul se rotește în jurul axei sale în 24 de ore, adică două apariții ale soarelui în dreptul aceluiași meridian (cel pe care vă aflați dv.) se fac după 24 ore. Sau puteți face ipoteza, dinaintea apariției teoriei heliocentrice, că soarele se învîrtește în jurul pămîntului ; nu veți altera cu nimic corectitudinea demonstrației care urmează !

Deci, cadranul solar, dacă permiteți să-l numim astfel, e împărțit în 24 de ore, pe cînd — în mod neinspirat — cadranul ceasului e împărțit în 12 ore (diviziuni).

Rezultă următoarele concluzii, demne de reținut :

— o diviziune unghiulară de pe ceas (unghiul determinat de centrul ceasului și două ore consecutive) are $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, iar aceea de pe imaginarul cadran solar $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$;

— limba orară a ceasului (cît v-o fi părînd ea de leneșă !) aleargă cu o viteză unghiulară de două ori mai mare decît aceea a razei care leagă ochiul nostru de soare. De exemplu, de la ora 6 dimineața la ora 6 după-amiază (18), în aceste 12 ore, soarele „parcurge" de la răsărit la apus, o jumătate din „cercul" său, adică 180°, pe cînd limba orară străbate întregul cerc al ceasului (360°).

La ora 12 ziua, soarele se află în dreptul meridianului locului, arătîndu-ne sudul. În acest moment cele două laturi ale unghiului nostru coincid (limba orară și semi-dreaptă care pleacă din centrul ceasului și trece prin ora 12). Unghiul fiind egal cu zero, bisectoarea se suprapune pe cele două laturi.

Îndreptînd limba orară către soare, înseamnă că și bisectoarea s-a îndreptat către soare și ne arată ceea ce știm : sudul !

Rezultă foarte clar că procedeul expus în text, de aflarea punctului cardinal sud, este corect pentru ora 12.

Să lăsăm ceasul și soarele să-și vadă de drum, ca să nu-l supărăm pe Cronos, și să revenim cu experiența noastră — de exemplu — la ora 2 (adică 14). Ce unghiuri au descris limba orară și raza vizuală care ne leagă de soare ? Pe baza celor arătate mai sus și, de altfel, ușor de dedus de fiecare din dv. :

— limba orară : $2 \times 30^\circ = 60^\circ$

— raza vizuală către soare : $2 \times 15^\circ = 30^\circ$

Față de poziția inițială, din experiența pe care am făcut-o la ora 12, raza vizuală către soare s-a deplasat cu 30°, iar limba

orară a descris un unghi de 60°. Ca să îndreptăm limba orară către soare, vom roti ceasul către stînga (în sens trigonometric, sau invers sensului acelor ceasornicului) cu 30°; deci și cealaltă latură a unghiului de 60° (care leagă centrul ceasului cu ora 12), se va roti către stînga cu 30°. Bisectoarea unghiului de 60° parcurs de limba orară (care trece acum prin ora 1), va face același lucru și ne va arăta direcția sud, suprapunîndu-se deci pe vechea bisectoare.

Pentru orice oră veți face experiența (orientarea), limba orară va parcurge un unghi (2α) dublu celui „parcurs" de soare (α). Bisectoarea unghiului 2α va arăta, pentru moment, direcția soarelui. Orientînd ceasul cu limba orară către soare, cele două laturi ale unghiului 2α și bisectoarea se vor roti către stînga cu α, astfel încît bisectoarea va indica tot timpul sudul.

Urmăriți și figurile de mai jos, în care apar numai limba orară a ceasului, poziția soarelui și sudul.

În figura I: este ora 12, soarele se află la meridianul locului, iar limba orară a ceasului arată sudul; unghiul α este egal cu zero, bisectoarea se suprapune pe limba orară.

În figura II: este ora 14 (2 p.m.); față de semidreapta centrului ceasului — ora 12, care coincide cu direcția sud (nu am rotit încă ceasul), soarele a „parcurs" unghiul $\alpha = 30°$, iar limba orară $2\alpha = 60°$, bisectoarea unghiului 2α trece prin ora 1 (13) către soare.

În figura III: efectuăm orientarea conform procedeului expus, adică îndreptăm limba orară către soare, deci rotim ceasul în jurul centrului său către stînga cu unghiul α; atît semidreapta centrul ceasului — ora 12, cît și bisectoarea se vor roti către stînga, cu unghiul α, iar bisectoarea ne va arăta direcția sud.

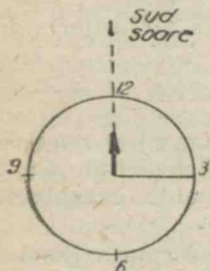


Fig. I

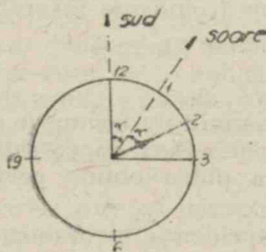


Fig. II

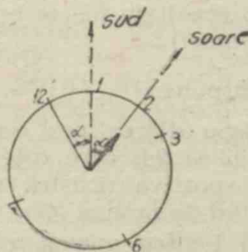


Fig. III

Deoarece unghiul 2 α descris de limba orară este totdeauna dublul celui descris de raza vizuală către soare, bisectoarea unghiului 2 α va fi îndreptată tot timpul către soare ; rotirea ceasului — în jurul centrului său — către stînga, cu unghiul α , va aduce bisectoarea pe direcţia sud. Rezultă că demonstraţia de mai sus este valabilă pentru orice oră a zilei lumină (soare vizibil). Încercaţi o demonstraţie pentru ora 18.

Şi acum o întrebare suplimentară : dacă cercul ceasului ar fi împărţit în 24 diviziuni (24 ore), care ar fi modificarea la metoda de orientare cu ajutorul ceasului şi soarelui ?

10. Biopsihoritmurile

Prin sistemul biopsihoritmurilor înţelegem variaţia proceselor psihologice şi fiziologice ale omului (intensitatea şi caracterul lor). Cu o anumită periodicitate, ele sînt avantajoase sau dezavantajoase pentru activitatea omului, ducînd fie la mărirea, fie la micşorarea randamentului său în diverse activităţi, atît cantitativ cît şi calitativ.

Să considerăm că bioritmurile fizic, intelectual şi emoţional au vîrfuri de maximă eficienţă la intervale de 22, 33 şi respectiv 24 zile şi că pentru o anumită sportivă coincidenţa acestor trei vîrfuri se întîmplă în ziua Z, cînd rezultatele sale pot fi cele mai bune. Mai facem ipoteza că ceilalţi factori sînt cvasi-constanţi şi nu influenţează performanţa sportivă (vîrsta, intensitatea şi calitatea antrenamentelor, anotimpul, arbitrajele, publicul etc.).

La cîte zile după ziua Z, sfătuiţi dumneavoastră pe sportivă să participe la concurs, pentru a obţine :

a) rezultate excepţionale (coincidenţa favorabilă a celor trei vîrfuri ale bioritmurilor) ?

b) rezultate foarte bune (coindenţa favorabilă a vîrfurilor a două bioritmuri) ?

Răspuns :

a) Se află cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al numerelor 22 ; 33 şi 24, care este 264. Deci cu această periodicitate (la 264 zile) sportiva noastră va putea obţine performanţe excepţionale, pornind de la ziua Z.

b) Pentru a avea coincidenţa favorabilă a cel puţin două din cele trei bioritmuri, vom afla c.m.m.m.c. al fiecărei perechi de numere, care ne arată periodicitatea bioritmurilor.

b1) Pentru numerele 22 și 33 ; c.m.m.m.c. = 66
b2) Pentru numerele 22 și 24 ; c.m.m.m.c. = 264
b3) Pentru numerele 33 și 24 ; c.m.m.m.c. = 264

Deci, sportiva va înregistra rezultate foarte bune la 66 zile (și multiplul acestora : 132 zile, 198 zile, 330 zile etc.) de la ziua Z. În cazurile *b2* și *b3* coincidența a două bioritmuri se suprapune peste aceea a trei bioritmuri (cazul a).

Practic, o dată pe an, sportiva poate înregistra rezultate excepționale și încă de patru ori rezultate foarte bune.

Problema de medicină sportivă, care trebuie rezolvată, este de a determina ziua Z (coincidența vîrfurilor celor trei bioritmuri), de la care începem numărătoarea.

11. Problema magazionerului unei echipe de fotbal

Lotul de bază al unei echipe de fotbal se prezintă la antrenament la ora fixată, dar găsește magazia închisă. După sfertul de oră „academic", antrenorul dă ordin să fie spart lacătul și fiecare jucător să-și ia cîte un echipament complet, iar antrenorul secund să scoată un număr de mingi pe care le consideră necesare, pentru buna desfășurare a antrenamentului.

Zis și făcut !

După o jumătate de oră sosește gîfîind și magazionerul care — în situația creată — e cuprins de desperare. El se prezintă la antrenor, îi cere scuze, dar este deosebit de îngrijorat de cele întîmplate în gestiunea sa, deoarece jucătorii și mingile sînt împrăștiați pe terenurile din jur și nu-i poate număra. Astfel el nu-și poate da seama cîte echipamente și cîte mingi au fost scoase din magazie.

În sprijinul său vine antrenorul — un om zgîrcit la vorbă — care îi furnizează următoarele date :

— „cînd am repartizat, la primul exercițiu, cîte o minge la cinci jucători, au rămas două mingi nefolosite ;

— la al doilea exercițiu, cu o minge pentru trei jucători, doi jucători au rămas fără minge ; mai departe, descurcă-te cum poți !"

Magazionerul se retrage în biroul său și, după calcule „dificile", găsește și numărul echipamentelor și al mingilor scoase din magazia sa.

Făcîndu-vă precizarea, care ar părea inutilă pentru mulți dintre dv., că numărul echipamentelor luate din magazie este egal cu cel al jucătorilor prezenți la antrenament, sînteți invitați să refaceți calculele aritmetice ale magazionerului !

Răspuns :

La primul exercițiu (o minge la cinci jucători și două mingi nefolosite), facem ipoteza că mai luăm zece jucători, astfel încît și cele două mingi libere să aibă același regim ca suratele lor. Deci fiecare din mingile luate din magazie este acum repartizată pentru cinci jucători. Toți jucătorii și toate mingile sînt cuprinși în procesul de antrenament.

La cel de-al doilea exercițiu (trei jucători la o minge și doi jucători liberi), în noua ipoteză, nu vor putea executa acest exercițiu doisprezece jucători (doi jucători conform textului și zece jucători împrumutați). Pentru ca și acești doisprezece jucători să ia parte la antrenament, ar trebui să-i repartizăm la grupele existente de cîte trei jucători la o minge, adică la fiecare grupă să mai participe încă doi jucători, deci în total să facem grupe de 3+2 jucători, ajungînd astfel în situația de la primul exercițiu (o minge la cinci jucători), numărul total al jucătorilor fiind mărit — ipotetic — cu zece. Se observă ușor că cei doisprezece jucători, îi vom putea repartiza cîte doi, la șase grupe (de cîte trei jucători), deci la șase mingi (puteți considera că grupe de trei jucători efectuează exercițiul al doilea cu cîte o minge și încă doi jucători stau în rezervă la fiecare grupă).

Deci, au fost scoase din magazie șase mingi, iar numărul jucătorilor a fost conform textului $N = 5(6-2) = 20$; sau

$$N = 3 \times 6 + 2 = 20$$

Pentru amatorii de algebră dăm și ecuația, în care am notat cu x numărul mingilor : $5(x-2) = 3x + 2$

Si acum, vă invit să mai încercați și o altă metodă de rezolvare, fără a mai fi nevoie să împrumutați cei zece jucători de la altă echipă !

Răspunsul vi se dă la sfîrșitul acestui capitol.

12. Fără algebră

Să se găsească trei numere, știind că raportul dintre primul și al doilea este 4/3, raportul dintre al doilea și al treilea este 9/7, iar suma lor este 504.

Respectați însă denumirea problemei !

Răspuns :

Dacă amplificăm primul raport cu 3 (valoarea lui nu se schimbă !), obținem 12/9. Deci, raportul dintre primul și al doilea

număr este acum $\frac{N_1}{N_2} = \frac{12}{9}$, iar dintre al doilea și al treilea $\frac{N_2}{N_3} = \frac{9}{7}$

Observați că în acest fel, pentru a ne referi la $N\,2$ (al doilea număr), recurgem în ambele rapoarte la același număr (9). Dacă nu reușeam acest lucru prin amplificarea unui singur raport, ar fi fost necesar să amplificăm ambele rapoarte, astfel încît să obținem cel mai mic multiplu comun al numerelor care se refereau la $N\,2$. De altfel, și în cazul concret de mai sus, nu am făcut altceva decît să aflăm c.m.m.m.c. — al numerelor 3 și 9 care, fiind 9, ne-a condus la necesitatea de a amplifica numai primul raport cu 3 (și, dacă vreți, pe al doilea cu 1).

Revenim la cele două rapoarte și, schimbînd mezii între ei, obținem :

$$\frac{N_1}{12} = \frac{N_2}{9}\ ; \quad \frac{N_2}{9} = \frac{N_3}{7}\ .$$

Deoarece cele două proporții conțin raportul comun $\frac{N_2}{9}$, putem scrie :

$$\frac{N_1}{12} = \frac{N_2}{9} = \frac{N_3}{7}$$

Rezultă că numerele căutate : $N\,1$, $N\,2$ și $N\,3$ sînt proporționale cu 12, 9 și 7.

Pentru a respecta condiția ca suma numerelor să fie 504, vom recurge la proprietatea : „într-un șir de rapoarte egale, suma numărătorilor supra suma numitorilor ne dă un raport egal cu fiecare din rapoartele date“. Deci :

$$\frac{N_1}{12} = \frac{N_2}{9} = \frac{N_3}{7} = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{12 + 9 + 7} = \frac{504}{28} = 18$$

Rezolvînd, rezultă :

$N\,1 = 12 \times 18 = 216$
$N\,2 = \ 9 \times 18 = 162$
$N\,3 = \ 7 \times 18 = 126$

13. Călătorie în doi, pe jos și cu bicicleta. [+]

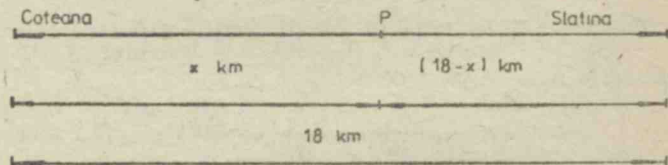
Între comuna Coteana—Olt și Slatina sînt 18 km. Doi frați trebuie să parcurgă această distanță, folosind, pe rînd — doar cîte unul — singura bicicletă pe care o au. Ei fac un calcul și hotărăsc: 1) va pleca mai întîi cel mai mic dintre ei cu bicicleta, pe care o va lăsa la o anumită distanță și apoi își va continua călătoria pe jos; 2) cel mare va parcurge această primă distanță pe jos, va găsi bicicleta lăsată de cel mai mic și va călători mai departe cu acest mijloc de transport.

Să se afle distanța x, la care va trebui să lase fratele mai mic bicicleta, astfel încît ei să ajungă în același timp la oraș. Totodată au stabilit și vitezele cu care merg: a) cel mic cu bicicleta 20 km/h, iar pe jos 4 km/h; b) cel mare 30 km/h și, respectiv, 6 km/h.

Ce se întîmplă dacă va pleca mai întîi cel mare cu bicicleta? Calculați și viteza medie!

Răspuns:

Sistematizăm datele în graficul și tabelul de mai jos, astfel:



viteze frate mic	V bicicletă = 20 km/h	V jos = 4 km/h
viteze frate mare	V jos = 6 km/h	V bic = 30 km/h

Timpul necesar fratelui mai mic îl notăm cu $T1$ și va fi:

$$(1) \qquad T1 = \frac{x}{20} + \frac{18 - x}{4}$$

Timpul $T2$ necesar fratelui mai mare va fi:

$$(2) \qquad T2 = \frac{x}{6} + \frac{18 - x}{30}$$

Dar $T1 = T2$ (condiția din problemă). Deci :

$$\frac{x}{20}+\frac{18-x}{4}=\frac{x}{6}+\frac{18-x}{30} \quad \text{(o ecuație cu o necunoscută)}$$

Rezolvînd, rezultă $x = 11{,}7$ km (la această distanță de Coteana va trebui să lase fratele mai mic bicicleta și să-și continue drumul pe jos).

În ipoteza că va pleca primul fratele cel mare, ecuația va fi :

$$\frac{x}{30}+\frac{18-x}{6}=\frac{x}{4}+\frac{18-x}{20}$$

Rezultă $x = 6{,}3$ km (egal cu 18 km — 11,7 km, ceea ce era de așteptat !)

Timpul necesar îl scoatem din oricare din relațiile precedente :

$$T=\frac{11{,}7}{20}+\frac{6{,}3}{4}=\frac{11{,}7+31{,}5}{20}=\frac{43{,}2}{20}=2{,}16^{h}=2^{h}\,9'\,36''$$

Viteza medie :

$$V=\frac{S}{T}=\frac{18\text{ km}}{2{,}16\text{ h}}=8{,}(3)\text{ km/h}$$

14. O întrecere mai deosebită. [+]

De la comuna Coteana—Olt la Slatina sînt — după cum am văzut anterior — 18 km. Fratele mai mare propune următoarea întrecere : el se duce la Slatina și se înapoiază în comună mergînd pe jos ; în același timp, fratele mai mic va pleca de la un stîlp de telefon pînă la cel alăturat, se va înapoia, apoi va pleca pînă la cel de al doilea stîlp și din nou se va înapoia și tot așa va continua acest dute-vino pînă la cel de al 35-lea stîlp. Distanța între stîlpii de telefon este de 30 m, iar cel de-al 35-lea stîlp se află, deci, la numai $30 \times 35 = 1\,050$ m, adică aproximativ 1 km de la locul lor de plecare. Care din cei doi frați are de parcurs o distanță mai mare ?

Notă : Numărătoarea stîlpilor s-a făcut aici fără a lua în considerare pe cel de la plecare pe care — dacă vreți — îl numim stîlpul 0 (S 0).

Răspuns :

Fratele cel mare va parcurge $2 \times 18 = 36$ km.

Cel mic va parcurge dus—întors pînă la primul stîlp $2 \times 30 = 60$ m, pînă la cel de al doilea $2 \times 60 = 120$ m, pentru cel de al treilea $2 \times 90 = 180$ m. Sau, în ordine : $1 \times 60 = 60$; $2 \times 60 = 120$; $3 \times 60 = 180$; $4 \times 60 = 240$... etc. Deci, o progresie aritmetică cu rația 60, primul termen fiind tot 60. Ultimul termen al progresiei va fi $35 \times 60 = 2\,100$ m. (Se vede ușor că pentru fiecare stîlp el parcurge în plus, față de stîlpul anterior, $2 \times 30 = 60$ m). Progresia aritmetică este : 60 ; 120 ; 180... 2 100 m și are 35 termeni. Observați că se poate da factor comun 60 și obținem $60(1 + 2 + 3... + 35)$, adică, în paranteză, avem o progresie aritmetică cu rația 1, primul termen fiind 1, iar ultimul 35.

Lungimea drumului pe care trebuie să-l parcurgă fratele mai mic va fi suma termenilor acestei progresii :

$$S = \frac{60 + 35 \cdot 60}{2} \cdot 35 = 60 \cdot \frac{1 + 35}{2} \cdot 35 = 37800 \text{ m}$$

Deci, fratele mai mic va trebui să parcurgă 1 800 m mai mult și va termina cursa în urma celui mai mare, chiar dacă vor merge amîndoi cu aceeași viteză.

15. Leul de bronz. [+]

Și acum o problemă care pare a fi «strămoșul» dificilelor probleme cu robinetele, care umplu un bazin. Iată textul din Antologie :

„Sînt un leu de bronz. Ochii mei, gura și piciorul drept sînt fîntîni. Ochiul drept umple un bazin în 2 zile, ochiul stîng în 3 zile și piciorul drept în 4 zile. Gura mea face același lucru în 6 ore".

Dacă toate curg în același timp, cît le va trebui pentru a umple bazinul ?

Indicații :

1) Fiecare din cele patru fîntîni le considerăm izvoare sau robinete, care au debite diferite de apă.

2) Formula debitului este $Q = \frac{V}{T}$, unde : Q = debitul în litri sau m^3 pe secundă, oră, zi, an etc. ; V = volumul de apă în

unitățile de măsură pentru capacități sau pentru volume ; T = timpul (aici fiind dat în zile și ore, îl vom considera în ore).

Răspuns :

— Notăm cu V volumul bazinului de apă, despre care nu știm nimic. Vom vedea mai tîrziu că el se va simplifica în ecuația pe care o vom scrie și că deci poate fi considerat de la început egal cu unitatea ($V = 1$).

— Debitul ochiului drept $q_1 = \frac{V}{2 \text{ zile}} = \frac{V}{48 \text{ h}}$

— Debitul ochiului stîng $q_2 = \frac{V}{3 \text{ zile}} = \frac{V}{72 \text{ h}}$

— Debitul piciorului drept $q_3 = \frac{V}{4 \text{ zile}} = \frac{V}{96 \text{ h}}$

— Debitul scurs prin gură $q_4 = \frac{V}{6 \text{ h}}$

Dacă toate cele 4 surse (izvoare sau robinete) curg simultan, înseamnă că debitul total care umple bazinul este egal cu suma celor 4 debite, ca și cînd pe aceeași țeavă (robinet) ar curge toate cele patru izvoare, formînd unul singur. Deci :

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = \frac{V}{48} + \frac{V}{72} + \frac{V}{96} + \frac{V}{6} = \frac{61 \cdot V}{288}$$

Din formula debitului dată la «indicații», rezultă formula care ne dă volumul V (de asemenea, cunoscută de dumneavoastră) :

$$V = Q \cdot T$$

Înlocuim pe $Q = \frac{61 \cdot V}{288}$ (determinat mai sus)

$$V = \frac{61 \cdot V}{288} \cdot T \qquad (V \text{ se simplifică})$$

$$1 = \frac{61}{288} T \qquad \text{De unde :}$$

$$T = \frac{288}{61} \text{ h} = 4 \text{ h } 43' \, 16'' \text{ (4 ore, 43 minute și 16 secunde)}$$

Evident, rezultatul este inferior celui mai mic timp, în care o sursă umplea singură bazinul (în cazul nostru, debitul prin gura leului umplea bazinul în 6 ore).

16. Probleme cu robinetele care umplu un bazin

Pe baza teoriei dezvoltate în cadrul problemei „Leul de bronz", veți putea rezolva problemele cu robinete, din manualele școlare sau culegerile de probleme. Iată cîteva din ele :

A) Un bazin de apă poate fi umplut de robinetul R1 în 6 ore, iar de robinetul R2 în 2 ore. În cît timp umplu bazinul cele două robinete curgînd simultan ?

B) Două robinete curgînd împreună umplu un bazin în 4 ore. Dacă le lăsăm să curgă împreună 2 ore și închidem primul robinet, pentru umplerea bazinului este necesar ca al doilea robinet să stea deschis încă 6 ore. În cît timp umple fiecare robinet bazinul, curgînd singur ?

C) Robinetele R1, R2, R3, umplu un bazin astfel : R1 cu R2 în 3 ore ; R2 cu R3 în 4 ore ; R1 cu R3 în 6 ore. În cît timp umple fiecare robinet singur bazinul ?

D) Robinetele R1 și R2 umplu un bazin astfel : primul în 6 ore, iar al doilea în 2 ore. Robinetul de evacuare R3 golește bazinul plin în 3 ore, dacă robinetele de umplere R1 și R2, de alimentare, sînt închise.

Pornind de la ipoteza bazinului gol și deschizînd toate cele trei robinete (R1 și R2 de alimentare, R3 de evacuare), să se arate :

a) se acumulează apă în bazin ?

b) în caz afirmativ, în cîte ore se umple bazinul ?

Obs. : Se consideră toate debitele (inclusiv cel de evacuare) constante !

Răspuns : A

Considerăm volumul bazinului $V = 1$, iar timpurile 6 și respectiv 2 ore. Debitul primului robinet $q_1 = \frac{1}{6}$; debitul celui de al doilea robinet $q_2 = \frac{1}{2}$. Debitul însumat al celor două robinete :

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Timpul T, în care cele două robinete umplu bazinul, este :

$$T = \frac{V}{Q} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ h} = 1 \text{ h } 30'$$

Sau, fără nici o notaţie : într-o oră, R1 umple 1/6 din volumul bazinului, iar R2 umple **1/2** ; curgînd împreună, într-o oră vor umple $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ din volumul bazinului (adică două treimi). Pentru a umple şi cealaltă treime, va trebui ca robinetele să mai curgă împreună încă o jumătate de oră, deci, în total, 1 h 30'.

Răspuns : B

Vom da mai întîi metoda de rezolvare pe cale algebrică.

Notăm $x=$ numărul de ore în care primul robinet umple singur bazinul.

$y=$ numărul de ore în care al doilea robinet umple singur bazinul.

Cu notaţiile de la problemele anterioare avem :

$$q_1=\frac{1}{x}\ ; \quad q_2=\frac{1}{y}\ ; \quad q_1+q_2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ .$$

Dacă robinetele curg împreună, vor umple bazinul în 4 ore. După formula $T\cdot Q=V$, obţinem prima ecuaţie, în care volumul bazinului $V=1$.

$$(1) \qquad 4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$$

În ipoteza a doua (conform textului), primul robinet curge 2 ore, iar al doilea robinet $2+6=8$ ore. Cea de a doua ecuaţie este :

$$(2) \qquad 2\,\frac{1}{x}+8\,\frac{1}{y}=1$$

Şi sistemul de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute este :

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} & (1) \\ \frac{1}{x}+4\,\frac{1}{y}=\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Am împărţit prima ecuaţie cu 4 şi a doua cu 2.

Rezolvarea acestui sistem de ecuaţii se face fie prin substituţie de necunoscute $\left(\frac{1}{x}=t\ ;\ \frac{1}{y}=v\right)$, fie considerînd direct $\frac{1}{x}$ şi

$\frac{1}{y}$ necunoscute. Amplificăm ecuația (1) cu -1, adunăm ec. (1) cu ec. (2) și obținem $3\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$, de unde $y = 12$ h.

Din ecuația (1) se obține $x = 6$ h.

Notă: Rezolvarea, pe calea algebrică de mai sus, a fost dată pentru cazul general al problemelor de acest gen. În cazul particular al problemei noastre, observați că în 2 ore cele două robinete vor umple jumătate din bazin (în 4 ore, ele îl umplu complet!), deci cel de al doilea robinet va umple cealaltă jumătate de bazin în 6 ore, adică întreg bazinul în 12 ore. Avem deja un rezultat, găsit și mai sus: $y = 12$ h. Mai departe, continuați singuri! Puteți să-l aflați și pe celălalt, tot pe cale aritmetică!

Răspunsul vi se dă la sfîrșitul capitolului, dar mai întîi încercați singuri: luați schematic un bazin (sau numai înălțimea lui, considerînd secțiunea orizontală constantă), împărțiți-l pe verticală în 12 părți egale... etc.

Răspuns : C

Notăm cu x, y, z numărul orelor în care robinetele R1, R2, R3 umplu fiecare bazinul, debitele fiind în ordine: $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$; $\frac{1}{z}$

Cu notațiile și convențiile făcute anterior, sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute este:

$$\begin{cases} (1)\quad 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \\ (2)\quad 4\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1 \\ (3)\quad 6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} (1')\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \\ (2')\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4} \quad \Big|\, -1 \\ (3')\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Metoda reducerii ne dă (1')—(2') ecuația (I)

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{12} & \text{(I)} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} & \text{(3')} \end{cases}$$

(I) + (3') dau $2\frac{1}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$ Rezultă :

$$\begin{cases} x = 8 \text{ ore} \\ y = \frac{24}{5} \text{ ore} \\ z = 24 \text{ ore} \end{cases}$$

Notă :

Se poate imagina o rezolvare pe cale aritmetică — destul de greoaie, de altfel — urmărind rezolvarea algebrică de mai sus : din debitele însumate ale robinetelor (R1 + R2 (ec. 1') scădem pe cele ale robinetelor R2 + R3 (ec. 2') și obținem diferența dintre debitele R1 și R3 (ec. I) ; aceasta o adunăm cu suma debitelor R1 și R3 (ec. 3') și obținem de două ori debitul robinetului R1 ; se deduce apoi timpul (după formula $\frac{V}{T} = Q$) necesar ca primul robinet să umple singur bazinul. Celelalte timpuri se deduc, apoi, mult mai ușor. Sau, putem judeca astfel : dacă R1 și R2 umplu bazinul în 3 ore, înseamnă că într-o oră ele umplu $\frac{1}{3}$ din bazin. Cu judecăți similare conchidem că R2 și R3 vor umple într-o oră $\frac{1}{4}$ din bazin, iar R1 și R3 vor umple $\frac{1}{6}$ din bazin ; să însumăm toate aceste perechi de debite și vom ajunge la concluzia ipotetică — evident — că două robinete R1, două R2 și două R3 vor umple $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$ din bazin, într-o oră, conform schemei de mai jos :

R1 + R2 => $\frac{1}{3}$ din volumul bazinului (într-o oră).

R2 + R3 => $\frac{1}{4}$ din volumul bazinului (într-o oră).

R1 + R3 => $\frac{1}{6}$ din volumul bazinului (într-o oră).

Însumînd, avem 2(R1+R2+R3) => $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ din volumul bazinului.

Curgînd împreună numai cîte un robinet din cele trei (R1 + R2 + R3), se va umple într-o oră $\frac{3}{8}$ din volumul bazinului. Deoarece primele două robinete (R1+ R2) umplu — tot într-o oră, $\frac{1}{3}$ din bazin, rezultă că robinetul R3 va umple într-o oră $\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$ din volumul bazinului, deci R3 va umple bazinul în 24 de ore. Cu judecăți similare găsim și celelalte timpuri :

Pentru robinetul R1 avem :

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}; \text{ deci 8 ore.}$$

Pentru robinetul R2 avem :

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5}{24}\ ; \text{ deci } \frac{24}{5} \text{ ore.}$$

Răspuns : D

a) Pentru a se acumulă apă în bazin e necesar ca suma debitelor de alimentare $(q_1 + q_2)$ să fie mai mare decît debitul de golire q_3. Cu explicațiile și notațiile anterioare, avem :

$$q_1 + q_2 = \frac{V}{6}+\frac{V}{2}=\frac{4V}{6}=\frac{2V}{3}\ \text{m}^3/\text{h} > \frac{V}{3}\ \text{m}^3/\text{h}\ (q_3).$$

Deci, se acumulează apă în bazin ! (Pentru debitul q_3 de evacuare s-a neglijat influența pe care o are înălțimea apei din bazin asupra acestuia, deci q_3 = constant).

b) Notăm cu T = nr. de ore în care se umple bazinul. Avem relaţia :

$$T \cdot q_1 + Tq_2 - Tq_3 = V$$

$$T\frac{V}{6} + T \cdot \frac{V}{2} - T \cdot \frac{V}{3} = V$$

Împărţind cu V şi rezolvînd, rezultă $T = 3$ ore.

Notă. Rezultatul putea fi dedus direct de la răspunsul a, astfel :

$$q_1 + q_2 - q_3 = \frac{2V}{3} - \frac{V}{3} = \frac{V}{3} \quad \text{m}^3/\text{h}$$

Deci, într-o oră, cu toate robinetele deschise, se umple $\frac{1}{3}$ din volumul bazinului $\left(\frac{V}{3}\right)$. Pentru a se umple tot bazinul sînt necesare 3 ore !

Dacă în egalitatea de mai sus vom considera volumul egal cu unitatea (V = 1), aşa cum am convenit şi anterior, şi ne vom exprima convenabil (de exemplu : „debitele de alimentare minus cel de evacuare ne dau $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ în care numitorul 3 reprezintă ore“), putem considera că am găsit şi calea aritmetică de rezolvare.

17. O moştenire cu necazuri [+]

Un arab lasă moştenire celor trei băieţi ai săi 17 cămile şi impune următoarele condiţii : primul fecior să ia jumătate din numărul cămilelor, al doilea o treime, iar al treilea două cămile. Discuţiile între cei trei moştenitori (în special între primii doi) au fost lungi, furtunoase şi fără rezultat ! De altfel, observaţi uşor că numărul 17 nu se împarte nici la 2 (primul băiat trebuia să ia $\frac{1}{2} \cdot 17$), nici la 3 (al doilea băiat trebuia să ia $\frac{1}{3} \cdot 17$) !

Chiar dacă scădem mai întîi cele două cămile ale celui de al treilea fecior şi rămînînd 15, observăm că nici acest număr nu se împarte cu 2 În plus, cele trei părţi de moştenire ($\frac{1}{2} \cdot 17$; $\frac{1}{3} \cdot 17$ şi 2) adunate, trebuie să refacă moştenirea întreagă de 17 cămile !

Să facem această adunare :

$$\frac{1}{2}17+\frac{1}{3}17+2=\frac{51+34+12}{6}=\frac{97}{6}=16+\frac{1}{6}\neq 17$$

Deci, nici această condiţie nu este îndeplinită !

Este evident că bătrînul lor tată greşise, atunci cînd impusese condiţiile din testament !

In final, cei trei moştenitori au apelat la un înţelept, care le-a rezolvat problema. Cum a procedat înţeleptul ?

Răspuns :

Înţeleptul a mai adus o cămilă, astfel că numărul total al cămilelor a devenit $17+1=18$, şi i-a convins destul de uşor, pe primii doi feciori, că valoarea fracţiilor $\frac{1}{2}$ sau $\frac{1}{3}$ din 18 e mai mare decît valoarea acestor fracţii din 17. Deci, că în noua situaţie ei sînt avantajaţi. Sperăm că sînteţi de acord ! Cît despre al treilea fecior, acesta avea soarta pecetluită : trebuia să primească 2 cămile ! Înţeleptul a calculat şi fraţii s-au conformat pe loc :

— primul moştenitor va lua $\frac{1}{2}\ 18=9$ cămile

— al doilea moştenitor va lua $\frac{1}{3}\ 18=6$ cămile

— al treilea moştenitor va lua 2 cămile.

Toţi au fost mulţumiţi dar au plecat totuşi cu o oarecare nedumerire, observînd că $9+6+2=17$ cămile (exact cît le lăsase tatăl lor) şi că înţeleptul şi-a luat cămila înapoi.

18. Elevii în excursie

Un grup de elevi a plecat în excursie. La trecerea peste un rîu au găsit un număr de bărci, astfel încît dacă se îmbarcau cîte şase, patru elevi rămîneau fără loc, iar dacă se îmbarcau cîte opt, rămînea o barcă liberă. Cîţi elevi şi cîte bărci erau ?

Convenţia stabilită la problemele anterioare rămîne valabilă : algebra mai la urmă !

Răspuns :

R1) Presupunem că mai luăm 8 elevi, astfel încît atunci cînd se îmbarcau cîte 8, toate bărcile ar fi fost ocupate complet. Îm-

barcăm acum noul număr de elevi (cel real plus 8) în formație de 6 elevi într-o barcă. Cîți vor rămîne fără loc ? Răspunsul e simplu : cei 4 menționați în text, plus 8 luați în plus de noi, deci 12 elevi nu vor avea loc.

Acești 12 elevi, care nu au loc, provin din faptul că în loc de 8 elevi în barcă (situație în care încap toți), am așezat cîte 6 elevi în barcă, deci cîte 2 mai puțin în fiecare barcă. Numărul bărcilor este $12 : 2 = 6$.

Numărul elevilor rezultă din text : $6 \times 6 + 4 = 40$ elevi.

R2) Rezolvare algebrică

Notăm N = numărul elevilor și n = numărul bărcilor.
În prima variantă (6 elevi în barcă) $N = 6n + 4$
În a doua variantă (8 elevi în barcă) $N = 8(n-1)$
Egalăm cele două ecuații $6n + 4 = 8(n-1)$ și rezultă :

$$n = 6 ;\ N = 40$$

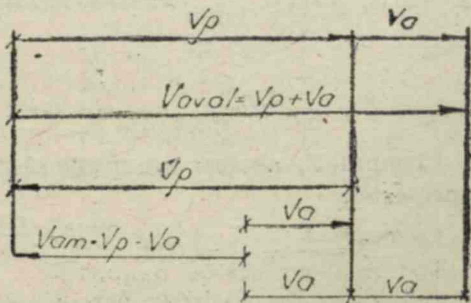
19. Vaporul și pluta

Un vapor parcurge pe Dunăre, în sensul curentului (către aval), distanța S în 5 ore, iar împotriva curentului (către amonte), aceeași distanță o parcurge în 6 ore.

Să se afle în cît timp parcurge această distanță (S) o plută purtată doar de viteza apei (evident, în sensul curentului).

Răspuns 1 :

Mergînd către aval, vaporul va căpăta o viteză egală cu viteza proprie *(vp)* în apă stătătoare, plus viteza apei *(va)*. Contra curentului, viteza de înaintare va fi diferența celor două viteze. Rezultă că viteza către aval este mai mare decît aceea către amonte cu de două ori viteza apei *(va)*. Pentru reprezentarea intuitivă faceți și un grafic.



Distanța — fiind aceeași în ambele variante — poate fi considerată egală cu unitatea, deci 1.

În acest caz, viteza vaporului către aval va fi $v_{av} = \frac{1}{5}$, iar către amonte $v_{am} = \frac{1}{6}$. Diferența dintre ele $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}\right)$ reprezintă de două ori viteza apei, rezultînd, astfel, că viteza apei este $\frac{1}{2} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$. Remarcați că în această fracție, la numărător avem spațiul, pe care l-am considerat egal cu unitatea, iar la numitor avem timpul, adică numărul de ore (60) necesare plutei să parcurgă distanța respectivă.

Observații. Dacă notam distanța cu S (nu egală cu unitatea), rezultatul era același, deoarece în fracția $\frac{S}{60}$ care ne-ar fi dat viteza apei, la numitor am fi avut, de asemenea, timpul necesar plutei să parcurgă distanța S cu viteza apei, adică tot 60 de ore.

Răspuns 2 :

Notăm x = viteza proprie a vaporului în km/h

y = viteza apei în km/h

S = distanța parcursă într-un sens.

Conform legii spațiului ($S = v \cdot t$) vom avea :

(1) $S = (x+y)\,5$

(2) $S = (x-y)\,6$

și rezolvînd, obținem :

$$x = \frac{11\,S}{60} \text{ km/h}$$

$$y = \frac{S}{60} \text{ km/h}$$

Timpul T, necesar ca pluta să parcurgă distanța S, cu viteza apei, este :

$$T = \frac{S}{y} = \frac{S}{\frac{S}{60}} = 60 \text{ h}$$

Observații :

a) rezultatul se putea vedea ușor, imediat după rezolvarea sistemului de ecuații, care ne-a dat viteza apei (sau a plutei) $y = \frac{S}{60}$, deorece numărul de la numitor nu reprezintă altceva decît timpul în ore, necesar ca pluta să parcurgă distanța S.

b) În același mod se poate determina timpul în care vaporul ar putea parcurge distanța S, fără a fi ajutat de viteza apei (deci în apă stătătoare).

$$x = \frac{11\,S}{60} = \frac{S}{\frac{60}{11}}$$

Acest timp este $\frac{60}{11}$ ore și este cuprins între 5 și 6 ore (vezi textul).

20. Ghicirea unui număr gîndit de altcineva

A) Cereți unui amic să-și fixeze un număr în gînd, apoi să facă următoarele operații :

— să-l ridice la pătrat ;
— să scadă, din acest pătrat, dublul numărului inițial ;
— să adauge 1 ;
— să vă spună rezultatul.

Veți extrage radicalul din acest rezultat, veți adăuga 1 și veți găsi numărul gîndit de prietenul dumneavoastră.

Arătați baza teoretică a acestui procedeu !

Răspuns :

$n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 = R$

$$\sqrt{R} = \sqrt{(n-1)^2} = n - 1 \Rightarrow n = \sqrt{R} + 1$$

Ex: pt. $n = 5 \Rightarrow R = 16 \Rightarrow n = \sqrt{R} + 1 = \sqrt{16} + 1 = 4 + 1 = 5$

B) Se fixează numărul în gînd. Cereți apoi :

— să-l înmulțească cu 4 ;
— să scadă 2 ;
— rezultatul să-l împartă la 2, apoi să-l înmulțească cu 3 ;

— să adauge 3.

Cereți rezultatul, împărțiți-l la 6 și veți găsi numărul gîndit! Justificați baza teoretică a operațiunilor!

Răspuns :

n = numărul gîndit.

Operațiunile succesive sînt :

$$R=\frac{4n-2}{2}\cdot 3+3=\frac{2(2n-1)}{2}\cdot 3+3=6n-3+3=6n;$$

$$\frac{6n}{6}=n$$

$$\text{Ex}: n=12 \Rightarrow R=72 \Rightarrow n=\frac{72}{6}=12$$

C) Luați o expresie care, adusă la o formă simplă, să conțină o necunoscută!

Din expresia simplificată egalată cu rezultatul final al calculelor, dat de cel care a gîndit numărul respectiv, veți putea determina valoarea necunoscutei.

Vă propunem exemplul :

— Cineva gîndește la un număr (fie acesta x).

— Îi cereți apoi să facă operațiunile din expresia de mai jos :

$$E(x)=\frac{(x^3+2-2x^2-x)\cdot 2}{(x-1)(x-2)}$$

Adică, să-l ridice la cub, să adune 2, să scadă de două ori pătratul lui, să scadă numărul respectiv, să înmulțească totul cu 2 și apoi să-l împartă cu numărul respectiv minus unu și cu numărul respectiv minus doi.

Ce va rezulta, vom vedea imediat, aducînd $E(x)$ la forma cea mai simplă!

$$E(x)=\frac{x^3-2x^2-x+2}{(x-1)(x-2)}\cdot 2=\frac{x^2(x-2)-(x-2)}{(x-1)(x-2)}\cdot 2=$$

$$=\frac{(x-2)(x^2-1)}{(x-1)(x-2)}\cdot 2=\frac{x^2-1}{x-1}\cdot 2=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}\cdot 2=$$

$$=2(x+1)=2x+2$$

Acum îi cereți rezultatul! Fie acesta N și avem $2x+2=N$;

$$x = \frac{N-2}{2}$$

Deci, din rezultatul dat de interlocutorul Dv. veți scădea 2, apoi veți împărți la 2 și veți afla numărul gîndit de el.

Exemplul numeric

Aleg în gînd numărul 11.

Cubul lui este 1331, plus 2 dă 1333, scăzut de două ori pătratul lui avem : $1333 - 2 \cdot 121 = 1333 - 242 = 1091$, îl scădem pe el însuși și obținem 1080, îl înmulțim cu 2 și avem 2 160, îl împărțim la $11 - 1 = 10$ și ne dă 216, pe care îl împărțim din nou la $11 - 2 = 9$ și rezultă 24.

Acesta este N. Conform celor de mai sus, $x = \frac{N-2}{2} = \frac{24-2}{2} = 11$.

Vă recomand să renunțați la operațiuni care conțin cuburi, sau să sfătuiți amicul să-și aleagă numere mici, pentru a nu fi nevoie de calcule greoaie.

D) *Aflăm două numere gîndite de un amic*

Pornim de la o expresie algebrică $E(x, y)$, sub formă de fracție, la care fie numărătorul, fie numitorul conțin numai o necunoscută. De exemplu :

$$E(x,y) = \frac{4x^2 - 1}{y(2x+1) - 4x - 2}$$

Dumneavoastră veți cere ca cineva să se fixeze asupra a două numere x și y și să facă operațiile din $E(x, y)$.

Cereți rezultatul sub forma fracționară $\frac{N}{M}$ fără a se face simplificări, chiar dacă fracția este echiunitară ($N = M$).

Observați că și $E(x, y)$ se putea simplifica cu $(2x+1)$, dar nu am recurs la aceasta, pentru a face calculele mai laborioase.

Din $4x^2 - 1 = N$

Rezultă $x^2 = \frac{N+1}{4}$; $\qquad x = \frac{\sqrt{N+1}}{2}$

Din expresia numitorului, pe care o punem sub formă de produs, obținem :

$$y(2x+1) - 2(2x+1) = (2x+1)(y-2) = M$$

$$y-2=\frac{M}{2x+1}; \qquad y=\frac{M}{2x+1}+2$$

Deci, avînd valoarea lui N, putem calcula pe x și apoi, cu valoarea acestuia și a lui M, calculăm y.

Exemplul 1 :

$x=5$ și $y=11$ (cele două numere la care a gîndit cineva sînt 5 și 11). Păstrați ordinea numerelor și cereți să se facă operațiile din forma inițială a lui $E(x, y)$, adică :

$$E(5,11)=\frac{4\cdot 5^2-1}{11(2\cdot 5+1)-4\cdot 5-2}=\frac{99}{121-22}=\frac{99}{99}=\frac{N}{M}$$

$$x=\frac{\sqrt{N+1}}{2}=\frac{\sqrt{99+1}}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$y=\frac{M}{2x+1}+2=\frac{99}{2\cdot 5+1}+2=\frac{99}{11}+2=11$$

Exemplul 2 :

Numerele 11 și 5 (deci $x=11$ și $y=5$)
După operațiuni veți ajunge la :

$$E(11,5)=\frac{483}{69}$$

$$x=\frac{\sqrt{N+1}}{2}=\frac{\sqrt{483+1}}{2}=\frac{\sqrt{484}}{2}=\frac{22}{2}=11$$

$$y=\frac{M}{2x+1}+2=\frac{69}{2\cdot 11+1}+2=\frac{69}{23}+2=3+2=5$$

Evident, dacă alegem numere mari, calculele sînt mai laborioase, dar modelul D arătat aici, pentru a «ghici» două numere gîndite de cineva, ni se pare a fi mai distractiv și original în același timp !

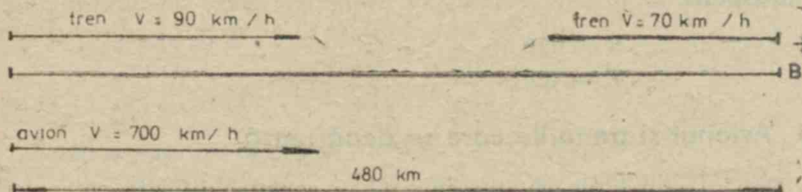
21. Avionul și trenurile care se apropie

Între localitățile A și B traseul căii ferate este rectiliniu și măsoară 480 km. Din A pleacă către B un tren cu o viteză de 90 km/h și un avion cu 700 km/h. Simultan, din B către A pleacă un tren cu o viteză de 70 km/h. Avionul urmează — evident în aer — tra-

seul căii ferate, se întîlnește cu trenul plecat din B, se întoarce pe același traseu pînă întîlnește trenul plecat odată cu el din A, se reîntoarce pînă întîlnește trenul din B și tot așa mai departe, pînă în momentul în care cele două trenuri se întîlnesc într-un punct pe traseu.

Considerînd toate vitezele arătate mai sus ca fiind constante și neglijînd pierderile de timp pe care le face avionul cu manevrele de întoarcere, atunci cînd întîlnește vreunul din trenuri, să se arate ce distanță parcurge avionul de la plecarea simultană a celor trei vehicule, pînă la întîlnirea celor două trenuri ?

Răspuns :



Observație : Viteza de apropiere a celor două trenuri este suma vitezelor lor, adică $Vt = 90 + 70 = 160$ km/h.

Pentru a răspunde la întrebare, ne vom referi la timpul necesar celor două trenuri pentru a se întîlni, care este egal cu timpul cît zboară avionul între ele.

$$T = \frac{S}{Vt} = \frac{480}{90 + 70} = \frac{480}{160} = 3 \text{ h}$$

Deci, după trei ore de la plecarea celor trei mijloace de transport trenurile se întîlnesc într-un punct pe traseu (evident întîlnirea are loc mai aproape de B și anume la $3 \times 70 = 210$ km de B și la $3 \times 90 = 270$ km de A).

În aceste trei ore avionul nostru a parcurs spațiul :

$$Sa = Va \cdot T = 700 \text{ km/h} \times 3 \text{ h} = 2\,100 \text{ km}.$$

Notă : Problema se poate pune sub diverse forme, cu singura condiție ca cel de al treilea vehicul, sau „obiect zburător“, sau chiar pasăre, să aibă viteza mai mare decît a fiecăruia dintre cele două vehicule care se apropie.

În mod asemănător, rezolvaţi problema următoare, la care nu vi se dă decît rezultatul.

22. Jucătorii de oină.

Doi jucători, aşezaţi la o distanţă iniţială de 30 m unul de altul, îşi aruncă mingea de oină, fără a o reţine (neglijăm timpul de reţinere a mingii în mîini). Mingea zboară cu o viteză de 30 m/s, iar cei doi jucători se apropie unul de celălalt cu viteza de 1 m/s şi respectiv 0,5 m/s. Ce spaţiu parcurge mingea pînă la întîlnirea celor doi jucători ?

Răspuns :

$S = 600$ m
$T = 20$ s.

23. Avionul şi trenurile care se depărtează

Două trenuri pleacă din gara G în sensuri diferite către localităţile A şi B. De la G la A sînt 400 km şi trenul are o viteză constantă de 100 km/h. De la G la B sînt 720 km şi trenul o parcurge cu viteza constantă de 120 km/h. Un avion face continuu legătura între ele, pe acest traseu rectiliniu, avînd o viteză de 700 km/h, pînă în momentul în care s-au oprit ambele trenuri.

Ce spaţiu parcurge avionul ? Ţinînd seama de vitezele arătate în text, problema e posibilă ?

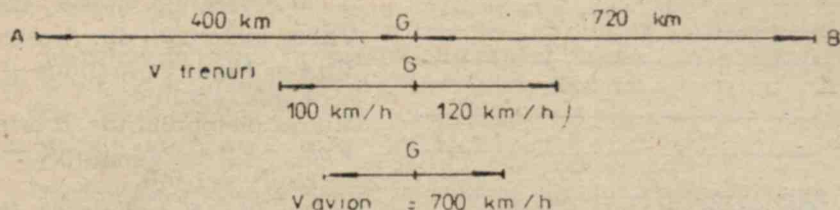
Note : 1) Neglijaţi o fază iniţială, necesară, ca trenurile să se depărteze convenabil, astfel ca avionul să poată începe urmărirea.

2) Acţiunea de urmărire încetează în momentul în care ultimul tren a ajuns la destinaţie, indiferent de locul în care se află avionul.

Răspuns :

Răspundem mai întîi la întrebarea a doua ! Problema e posibilă, deoarece viteza avionului (700 km/h) e mai mare decît viteza fiecărui tren. Observaţi că este mai mare şi decît suma vitezelor celor două trenuri.

În afară de faptul că problema diferă de precedentele (trenurile pleacă din acelaşi loc şi se depărtează), observăm că după 4 h trenul care a plecat către stînga a ajuns în A, iar celălalt a parcurs



numai 4 h × 120 km/h = 480 km, deci mai are de parcurs încă 240 km. În această ultimă fază, avionul va zbura între punctul fix *A* și trenul care aleargă către *B*, pînă cînd acesta sosește în *B*. Deci, timpul cît zboară avionul va fi egal cu timpul cît merge trenul către dreapta, de la *G* la *B*.

$$T = \frac{S}{Vt} = \frac{720}{120} = 6 \text{ h}$$

Spațiul parcurs de avion va fi :

$$S = T \cdot Va = 6 \text{ h} \times 700 \text{ km/h} = 4\,200 \text{ km}.$$

24. Trotuarul rulant

Imaginați-vă un trotuar rulant, care are o viteză de 1 m/sec. Doi amici pornesc de la cele două capete ale trotuarului, unul în sensul de mers al acestuia, celălalt în sens invers. Cei doi au o viteză proprie de mers egală și anume de 2 m/sec.

a) Aflați cu ce viteză se va deplasa fiecare, mergînd pe trotuarul rulant ?

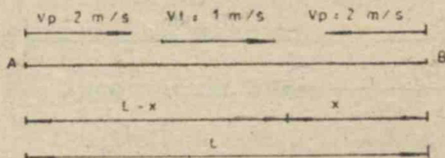
b) Dacă *L* este lungimea trotuarului, la ce distanță de capetele acestuia se vor întîlni cei doi amici ?

c) Puteți deduce această distanță, ținînd seama numai de vitezele efective ale celor doi pietoni ?

Răspuns :

Am notat :

— Viteza pietonilor $Vp = 2$ m/s
— Viteza trotuarului $Vt = 1$ m/s
— L = lungimea trotuarului rulant
— X = distanța la care se vor întîlni, de la capătul *B* către *A* (sens invers celui de rulare a trotuarului).



a) *Vitezele :*

Viteza pietonului din *A* este :
$VpA = Vp + Vt = 2$ m/s + + 1 m/s = 3 m/s
Viteza pietonului din *B* este
$VpB = Vp - Vt = 2$ m/s — — 1 m/s = 1 m/s.

Observați că viteza proprie a pietonului din *B* trebuie să fie mai mare decît aceea a trotuarului (2 m/s > 1 m/s), sau cel puțin egală, ceea ce ar însemna că stă pe loc, iar punctul de întîlnire va fi *B*.

b) *Locul de întîlnire :*

Plecînd simultan din *A* și, respectiv *B*, ei se vor întîlni la distanța x de capătul *B* al trotuarului, evident necesitînd același timp.

Timpul necesar pietonului din *A* este $TA = \dfrac{L - x}{3}$.

Timpul necesar pietonului din *B* este $TB = \dfrac{x}{1}$

Dar $TA = TB$, deci $\dfrac{L - x}{3} = \dfrac{x}{1}$

$4\,x = L$ rezultă $x = \dfrac{L}{4}$

(deci la un sfert din lungimea trotuarului măsurat de la *B* către *A* : vedeți schema de mai sus).

c) Viteza efectivă a pietonului care pleacă din *A* este $VpA =$ 3 m/s, iar a celui care pleacă din *B* este $VpB = 1$ m/s. Deci în fiecare secundă ei parcurg 4 m din distanța care îi separă, primul 3 m, al doilea 1 m. Primul parcurge 3/4 din spațiu, iar al doilea 1/4. La orice interval de timp aceste rapoarte se păstrează. Cînd se întîlnesc, ei au parcurs toată distanța L, în aceleași rapoarte : $\dfrac{3\,L}{4}$ și respectiv $\dfrac{L}{4}$. Deci, se vor întîlni la $\dfrac{3\,L}{4}$ față de punctul *A* și la $\dfrac{L}{4}$ față de punctul *B*.

25. Barca cu motor.

Mergînd în aval, în sensul curentului, barca are o viteză de 40 km/h, iar în amonte, contra curentului, 32 km/h.

Ce viteză are apa ?

Răspuns :

La coborîre, viteza bărcii este egală cu viteza proprie dată de motor *(V_m)*, plus viteza apei *(V_a)*, deci :

(1) $v_{coborire} = v_m + v_a = 40$ km/h

La urcare, viteza bărcii este egală cu viteza proprie dată de motor *(v_m)*, minus viteza apei *(v_a)*, deci :

(2) $v_{urcare} = v_m - v_a = 32$ km/h

Diferența între cele două viteze este :

(3) $v_{coborire} - v_{urcare} = v_m + v_a - (v_m - v_a) = 2v_a$

Din text rezultă că diferența aceasta este :

(4) $40 - 32 = 8$ km/h

Egalînd (3) cu (4) avem :

(5) $2v_a = 8$ km/h

$v_a = 4$ km/h.

26. Bateria de artilerie

O baterie de artilerie, compusă din patru tunuri, trage o salvă cu toate piesele, în același moment, apoi tragerea continuă după următorul program :

— Tunul nr. 1, după 3 secunde.
— Tunul nr. 2, după 5 secunde.
— Tunul nr. 3, după 6 secunde.
— Tunul nr. 4, după 10 secunde.

Secundele arătate mai sus se consideră de la momentul inițial, cînd s-a tras, simultan, salva de patru proiectile, apoi fiecare tun trage independent, la intervalul stabilit mai sus (3 sec., 5 sec., 6 sec., 10 sec.).

Răspundeți :

1) După cît timp vor mai trage tunurile în același moment ?

2) Pe parcursul acestui ciclu (care se reia), care din tunuri mai trag simultan ?

Răspuns :

R1) C.m.m.m.c. al numerelor 3, 5, 6, 10 este 30. Deci cele 4 tunuri vor trage din nou împreună după 30 sec.

R 2) Aflăm, de asemenea, c.m.m.m.c. al numerelor care reprezintă intervalele de tragere, pentru fiecare combinație de 2 sau 3 tunuri, și vom găsi :

— $T1$ și $T2$ în secunda 15 (de la prima salvă) ;

— $T1$ și $T3$ în secundele 6, 12, 18, 24 ;

— $T1$ și $T4$ nici o simultaneitate pe parcursul ciclului, deoarece c.m.m.m.c. al numerelor 3 și 10 este tot 30, deci vor trage împreună după 30 sec., atunci cînd trag toate patru.

— $T2$ și $T3$ — idem ca mai sus (c.m.m.m.c. al numerelor 5 și 6 este tot 30) ;

— $T2$ și $T4$ în secundele 10 și 20 ;

— $T3$ și $T4$ — nici o simultaneitate pe parcursul ciclului.

Niciodată nu vor trage simultan numai trei tunuri, deoarece c.m.m.m.c. al unei combinații de trei numere din cele patru (3, 5, 6, 10) este tot 30, adică atunci cînd trag toate cele patru tunuri.

Pentru reprezentarea intuitivă, încercați și o diagramă, așezînd pe orizontală în dreptul fiecărui tun intervalele de tragere și veți putea constata simultaneitățile de mai sus !

27. Două trenuri care se urmăresc

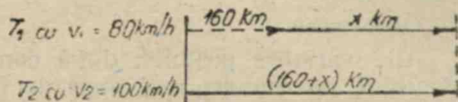
Dintr-o gară pleacă un tren cu viteza de 80 km/h. După 2 h, din aceeași gară, în aceeași direcție, pleacă în urmărirea lui un al doilea tren, cu viteza de 100 km/h. După cît timp de la plecarea primului tren, acesta este ajuns de al doilea tren ?

Răspuns :

R1) După 2 ore primul tren a parcurs 2×80 km/h $= 160$ km. Această distanță trebuie recuperată de al doilea tren într-un ritm de $100 - 80 = 20$ km/h (diferența de viteză în avantajul său). Deci, recuperarea (ajungerea din urmă) se face în 160 km : 20 km/h $=$ $= 8$ ore. Adăugăm cele 2 ore, avansul de timp al primului tren, și obținem $T = 8 + 2 = 10$ ore.

R2) Conform diagramei alăturate, vom scrie că timpul necesar primului tren să parcurgă distanța x trebuie să fie egal cu timpul necesar celui de al doilea tren să parcurgă distanța $160 + x$.

Vom avea :



$$T_1 = \frac{x}{80} \; ; \; T_2 = \frac{160 + x}{100}$$

și cum $T_1 = T_2$

$$\frac{x}{80} = \frac{160 + x}{100} \implies x = 640 \text{ km.}$$

Deci, cel de al doilea tren va ajunge pe primul, după ce va parcurge $640 + 160 = 800$ km. Ținînd seama de viteza sa, de 100 km/h, rezultă : $T_2 = \frac{800}{100} = 8$ ore, sau $T_1 = \frac{640}{80} = 8$ ore. La aceasta se adaugă cele 2 ore reprezentînd avansul de timp al primului tren.

28. O familie numeroasă

Un băiat afirmă : „eu am un număr egal de frați și de surori". Una din surori spune la rîndul său : „eu am de două ori mai mulți frați decît surori". Dacă ambele afirmații sînt corecte, calculați cîți frați și cîte surori erau în acea familie ?

Răspuns :

R1) Din afirmația băiatului rezultă că fără el ar avea un număr egal de frați și de surori, deci erau perechi, adică un număr cu soț. Adăugîndu-l și pe el rezultă : a) numărul băieților e mai mare cu unu decît numărul fetelor ; b) în total numărul de băieți și de fete e un număr fără soț.

Din afirmația fetei rezultă că numărul băieților este cu soț (de 2 ori mai mult decît surori ; orice număr natural înmulțit cu 2 ne dă un număr cu soț !) Ținînd seama de concluzia a) de mai sus, rezultă că numărul fetelor era fără soț.

Tot din afirmația fetei rezultă că ea mai avea surori, deci cel puțin încă două și cu ea trei. (Dacă am admite la limită, că prin «surori» înțelegem că putea fi doar una singură, ar rezulta două fete, adică un număr cu soț, ceea ce contravine celor stabilite mai sus).

Pentru un număr minim de trei fete, rezultă patru băieți. Soluția satisface condițiile din problemă :

— Dați un băiat deoparte și rămîn trei băieți și trei fete, adică : „număr egal de frați și surori", așa cum afirmă el.

— Daţi o fată deoparte şi vor rămîne patru băieţi şi două fete, adică : „de două ori mai mulţi fraţi decît surori".

Observaţie

Alte variante posibile, după concluziile rezultate din afirmaţia băiatului, cu numere mai mari de fraţi şi de surori, sînt 6 ; 5 sau 8 ; 7 sau 10 ; 9 etc. Remarcaţi însă că acestea nu sînt soluţii ale problemei, deoarece nu satisfac afirmaţia fetei.

$6 < 2(5-1)$; $8 < 2(7-1)$; $10 < 2(9-1)$.

Deci cu cît cresc cele două numere consecutive (susceptibile a deveni soluţii), cu atît mai mult apare mai evidentă inegalitatea.

Rezultă că soluţia 4 ; 3 este unică.

R2) Notăm : b = nr. băieţi şi f = nr. fete. Conform celor de mai sus avem :

$$\begin{cases} b-1=f & (1) \\ b=2(f-1) & (2) \end{cases}$$

Rezolvînd rezultă :

$$\begin{cases} f=3 \\ b=4 \end{cases}$$

29. La librărie. [–]

Cumpăr 3 pixuri şi 10 creioane şi plătesc 62 lei. Ştiind că un pix costă de şapte ori mai mult decît un creion, să se arate cît costă un pix şi cît costă un creion.

Răspuns :

Presupunem că în loc de pixuri am cumpărat creioane. Astfel în loc de 3 pixuri putem cumpăra $3 \times 7 = 21$ creioane, la care adăugînd pe cele 10 efectiv cumpărate, rezultă că putem cumpăra $21+10=31$ creioane, cu aceeaşi sumă de 62 lei. Deci, un creion costă :

$62 : 31 = 2$ lei

Un pix va costa de şapte ori mai mult, deci :

$7 \times 2 = 14$ lei.

30. Cursa pe circuit închis

Un circuit închis este parcurs complet de o maşină în 10', de o motocicletă în 15', de un cal de curse în 20' şi de un alergător

în 30'. Dacă plecarea este simultană, să se afle după cît timp vor fi din nou pe aceeași linie, precum și numărul de curse parcurs de fiecare.

Răspuns :

R1) Aflăm cel mai mic multiplu comun al celor patru numere care reprezintă timpurile necesare pentru parcurgerea circuitului.

$$10=2\cdot 5$$
$$15=3\cdot 5$$
$$20=2^2\cdot 5$$
$$30=2\cdot 3\cdot 5$$
$$\text{c.m.m.m.c.}=2^2\cdot 3\cdot 5=60$$

Deci, după 60' (o oră) și apoi multiplii acestora, cei patru alergători vor fi pe aceeași linie.

R2) $n1$ (ture mașină) $= \dfrac{60'}{10'} = 6$ ture

$n2$ (ture motocicletă) $= \dfrac{60'}{15'} = 4$ ture

n3 (ture cal de curse) $= \dfrac{60'}{20'} = 3$ ture

$n4$ (ture alergător) $= \dfrac{60'}{30'} = 2$ ture

31. Jocul de șah și producția de grîu. [+]

Jocul de șah a fost descoperit, după unii autori, în Persia, iar după alții în India. Noi vom considera că au dreptate cei care susțin Persia ca țară de origine a jocului de șah și admitem că numele inventatorului era Sessa.

Regele Persiei a fost deosebit de satisfăcut de acest nou joc și a vrut să-l răsplătească din plin pe inventator. Acesta, un om modest — ca toți oamenii mai deosebiți — a refuzat la început răsplata apoi, la insistențele regelui, a cedat, dar a vrut să mai servească o lecție stăpînului său. Sessa a cerut grîu, și anume «grăunți» sau boabe de grîu, după următoarea regulă : 1 bob pentru primul pătrățel al șahului, 2 boabe pentru cel de al doilea pătrățel, 4 pentru al treilea, 8 pentru a patrulea, 16 pentru al cincilea pătrățel ș.a.m.d.

Ştiţi, desigur, că tabla de şah are $8 \times 8 = 64$ pătrăţele! În faţa unei cereri atît de neînsemnate, regele s-a arătat nemulţumit, deoarece nu-şi putea etala mărinimia. Dar cu înţeleptul Sessa nu era de discutat şi regele a dispus să i se dea acestuia o baniţă de grîu. Acum Sessa schimbă rolul şi se arată el nemulţumit! Regele îi dă un sac, apoi un car de grîu, apoi o magazie, apoi... Dar inventatorul Sessa era în continuare nemulţumit. În final, Sessa calculează regelui său cantitatea de grîu ce i-o datora şi acesta a fost nevoit să recunoască faptul că nu era capabil să-şi onoreze datoria. Puteţi reface calculul lui Sessa? Puteţi calcula cantitatea de grîu, în tone, ori vagoane a 10 tone, sau trenuri a 1 000 tone ?

Indicaţii : 1) Numărul boabelor de grîu este suma termenilor unei progresii geometrice cu raţia 2, primul termen fiind 1 (sau dacă vreţi 2^0), iar ultimul termen 2^{63}, adică :

$$N = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}$$

(observaţi că sînt 64 termeni, cîte unul pentru fiecare din cele 64 pătrăţele).

2) Formula care vă dă suma termenilor unei progresii geometrice este $S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$ (semnificaţiile notaţiilor sînt arătate la răspuns).

3) Pentru ultima întrebare consideraţi că 1 tonă de grîu conţine 30 000 000 boabe de grîu $(30 \cdot 10^6)$.

Răspuns :

Numărul boabelor de grîu este $N = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2-1} =$

$= 2^{64} - 1 = 18 \cdot 446 \cdot 744 \cdot 073 \cdot 709 \cdot 551 : 615$ (deci un număr de douăzeci de cifre!). Unde : a_n = ultimul termen ; a_1 = primul termen ; r=raţia progresiei.

Pentru uşurinţa calculelor vom considera $N =$ 18 000 000 000 000 000 000 $= 18 \cdot 10^{18}$ (adică 18 trilioane boabe de grîu)

Cantitatea de grîu în tone

$$C = \frac{18 \cdot 10^{18}}{30 \cdot 10^6} = \frac{1\,800 \cdot 10^{16}}{30 \cdot 10^6} =$$

$= 60 \cdot 10^{10} =$ 600 000 000 000 tone (600 miliarde tone)

Considerînd producţia medie anuală de grîu a Persiei de 6 milioane tone, rezultă că regele datora lui Sessa producţia de grîu

a țării sale pe următorii 100 000 de ani (sau producția mondială din zilele noastre, pe cca 170 de ani).

Cantitatea de grîu în trenuri (100 vag.×10 t = 1 000 t)

$$N=\frac{60\cdot 10^{10}}{10^3}=60\cdot 10^7=600\,000\,000 \text{ trenuri}$$

32. Un părinte slab pedagog. [+]

Pentru a-și încuraja copilul la învățătură, un părinte îi promite o monedă de 5 lei, pentru prima notă de 10, două monezi de 5 lei pentru al doilea 10, patru pentru al treilea, opt pentru al patrulea ș.a.m.d. Copilul ia într-un singur trimestru 11 note de 10. Ce sumă ar trebui să primească?

Răspuns:

Aici progresia geometrică e ca aceea de la șah, cu deosebirea că fiecare termen e înmulțit cu 5. Astfel suma S ce trebuie plătită este:

$$S=1\cdot 5+2\cdot 5+2^2\cdot 5+2^3\cdot 5+\ldots+2^{10}\cdot 5=5(1+2+2^2+2^3+\ldots$$
$$\ldots+2^{10})=5(2^{11}-1)=5(2048-1)=5\times 2047=10235 \text{ lei.}$$

După cîte vedeți, suma este prea mare și părintele trebuia să fie mai prudent cu promisiunile și în special cu cele ale căror valori merg în progresie geometrică. Atenție însă și la factorul educațional!

33. Dispută pentru mere

Un băiețel răutăcios spune unei fetițe: „Dă-mi un măr, ca să am de două ori mai mult decît vei avea tu!“ Fetița, mai rațională, îi replică: „Dă-mi tu un măr, ca să avem un număr egal de mere!“ Dacă ambele afirmații sînt corecte, calculați dv. cîte mere avea fiecare copil?

Încercați să rezolvați pe bază de raționamente și apoi ajutați-vă de algebră.

Răspuns:

R1) Din afirmația băiatului rezultă că dacă ar lua un măr de la fată, numărul merelor sale ar fi de două ori mai mare decît numărul merelor care ar rămîne fetei, deci — în această ipoteză — el ar avea un număr cu soț de mere (înmulțirea cu 2 ne dă totdeauna un număr cu soț). Fără acest măr — pe care fetița nu

i l-a dat — rezultă că numărul merelor, deţinut iniţial de băiat, era fără soţ.

Din afirmaţia fetiţei rezultă că ea avea două mere mai puţin decît băiatul, deci şi ea avea iniţial un număr fără soţ de mere şi anume cu două mai puţin decît băiatul.

Mai departe : fetiţa nu putea avea un singur măr, pentru că dacă îl ceda băiatului, rămînea fără nici un măr şi în acest caz afirmaţia băiatului ar fi fost incorectă (primind mărul, el trebuia să aibă de două ori mai multe mere decît ar fi rămas fetiţei, adică tot nici un măr, deoarece $2\times0=0$ şi, în această ipoteză, problema nu mai are sens).

Rămîn în discuţie numerele merelor fetei 3 ; 5 ; 7 ; etc., iar ale băiatului (în mod corespunzător, mai mult cu două) 5 ; 7 ; 9 ; etc.

Perechea de numere 3 şi 5 satisface afirmaţia fetei $3+1=5-1$, dar nu şi pe a băiatului $5+1 \neq 2(3-1)$.

Următoarea pereche de numere 5 şi 7 satisface ambele afirmaţii, deci reprezintă răspunsul la problemă.

Afirmaţia fetei : $5+1=7-1$

Afirmaţia băiatului : $7+1=2(5-1)$

Observaţi că în continuare toate perechile de numere, susceptibile a fi soluţii, satisfac afirmaţia fetei (7 şi 9 ; 9 şi 11 ; 11 şi 13 etc.), dar nu şi pe aceea a băiatului $9+1 < 2(7-1)$; $11+1 < 2(9-1)$; $13+1 < 2(11-1)$. Cu cît alegem perechi de numere mai mari, cu atît mai mult inegalitatea devine mai evidentă. De aceea analiza noastră s-a restrîns numai la două perechi de numere 3 ; 5 şi 5 ; 7.

R2) Rezolvarea prin metodele algebrei e mai uşoară :

x=numărul de mere ale băiatului ;

y=numărul de mere ale fetei ;

$$\begin{cases} x+1=2(y-1) \\ y+1=x-1 \end{cases}$$

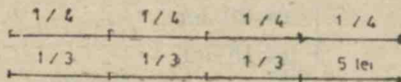
cu soluţiile $\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$

34. Diferenţa constantă de 5 lei ! [+]

Un copil are cu 5 lei mai mult decît celălalt. Dacă primul copil cheltuieşte un sfert din suma sa, iar al doilea o treime, diferenţa rămîne tot de 5 lei în favoarea celui dintîi. Ce sumă avea fiecare ?

Răspuns :

R1) Soluția aritmetică



Dacă dintr-o sumă se ia $1/4$, iar din cealaltă $1/3$ și diferența rămîne aceeași (5 lei), înseamnă că, de fapt, din fiecare s-au cheltuit sume egale. Deci, $1/4$ din prima sumă echivalează valoric cu $1/3$ din a doua sumă. În desenul de mai sus am exprimat exact acest lucru !

Presupunem că, în continuare, cei doi copii cheltuiesc în același ritm $1/4$ și $1/3$, încă de două ori ! Rezultă că primul a cheltuit în total de trei ori cîte un sfert $\left(3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\right)$ iar al doilea de trei ori cîte o treime adică toată suma $\left(3 \cdot \frac{1}{3} = 1\right)$. Primului i-au mai rămas $1/4$ din suma inițială, iar celui de al doilea nici un leu ! Diferența între sumele rămase necheltuite este în continuare constantă și anume 5 lei, ea reprezentînd $1/4$ din suma primului copil, căci al doilea copil a cheltuit toată suma. Dacă $1/4$ dintr-un întreg reprezintă 5 lei, este ușor de dedus că întregul va fi $4 \times 5 = 20$ lei, suma inițială a primului copil.

Cel de al doilea copil a avut $20 - 5 = 15$ lei.

Sau, mai simplu :

Mai înainte am ajuns la concluzia — exprimată și grafic — că 5 lei echivalează cu $1/4$ din suma primului copil, deci acesta avea $4 \times 5 = 20$ lei și, în același timp, cu $1/3$ din suma celui de al doilea copil, deci acesta avea $3 \times 5 = 15$ lei.

R2) Soluția algebrică

x=suma inițială a primului copil ;

y=suma inițială a celui de al doilea copil.

Conform textului, scriem următorul sistem de două ecuații, cu două necunoscute :

$$\begin{cases} x - y = 5 & (1) \\ \frac{3x}{4} - \frac{2y}{3} = 5 & (2) \end{cases}$$

Rezolvînd găsim :

$$\begin{cases} x=20 \text{ lei} \\ y=15 \text{ lei} \end{cases}$$

35. Automobilul în pană [+]

Un automobil trebuie să parcurgă distanţa de 400 km în 5 ore. Pe drum are o pană de motor şi pierde o oră cu remedierea ei. Pentru a ajunge la destinaţie la aceeaşi oră, automobilistul trebuie să dubleze viteza pe restul drumului.

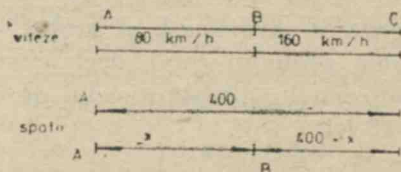
Aflaţi la cît timp de la plecare a avut pana de motor şi la ce distanţă.

Răspuns :

R1) Conform textului şi graficului alăturat, prima parte a drumului AB o parcurge cu 80 km/h (400 km : 5 h= 80 km/h), iar a doua cu 160 km/h.

Timpul efectiv de mers este 5—1=4 ore

Presupunem că în toate cele 4 ore de mers, automobilul are viteza constantă de 80 km/h. Rezultă că ar parcurge numai 4×80= =320 km, în loc de 400 km. Restul drumului de 80 km va trebui să-l recupereze dublînd viteza. Deoarece într-o oră maşina parcurge 80 km, şi în varianta noastră trebuie să mai parcurgă încă 80 km, rezultă că numai în ultima oră de mers viteza lui trebuie să fie dublă 2×80=160 km/h. Pana de motor a avut-o la 4—1=3 ore de la plecare, la distanţa de 3×80=240 km.



R2) Şi acum o rezolvare algebrică, sistematizînd datele într-un tabel.

Notăm cu x distanţa AB. Rezultă $BC=400-x$.

Cu aceste notaţii, graficul de la punctul 1 şi conform textului, completăm tabelul de mai jos :

	Partea întîi a drumului — AB	Partea a doua a drumului — BC	Total
spaţiul — km	x	$400-x$	400
viteza — km/h	80	160	—
timpul — ore	$\frac{x}{80}$	$\frac{400-x}{160}$	4 ore

Scriem o relaţie de timp: timpul necesar pentru a parcurge drumul AB, plus cel necesar pentru porţiunea BC, este egal cu 4 ore.

$$\frac{x}{80}+\frac{400-x}{160}=4$$

Rezolvînd ecuaţia, rezultă : $x=240$ km.

Pe această porţiune de drum a mers cu 80 km/h, deci :

$$T=\frac{S}{v}=\frac{x}{80}=\frac{240}{80}=3 \text{ ore}$$

Note :

a) Încercaţi să rezolvaţi în mod analog (ca la răspunsul 1), presupunînd că ar fi mers tot timpul cu viteza dublă de 160 km/h. Vedeţi cît ar fi mers în 4 ore, cu cît ar fi depăşit spaţiul necesar de parcurs (400 km) etc.

b) Vă recomandăm ca la asemenea probleme de mişcare — şi altele — să încercaţi sistematizarea datelor şi a necunoscutelor alese într-un tabel de felul celui de mai sus.

36. Vasul cu apă [–]

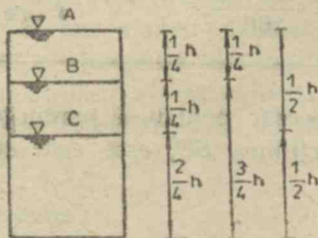
Avem un vas plin cu apă. Dacă scoatem un sfert din cantitatea de apă, vasul cu apa rămasă cîntăreşte 2050 g, iar dacă scoatem jumătate din volumul de apă, vasul cu apă rămasă cîntăreşte 1450 g. Se cere greutatea vasului fără apă !

Răspuns :

Vasul plin (nivel A) are o greutate necunoscută (G vas+G apă).

La nivelul *B* avem : Gvas$+\frac{3}{4}$ Gapă=2050 g.

La nivel C avem : Gvas$+\frac{2}{4}$ Gapă=1450 g.



(Greutatea apei este direct proporțională cu înălțimea coloanei de apă). Diferența de greutate între nivele *B* și *C* este : 2 050 — 1 450 = 600 g și reprezintă greutatea unui sfert din volumul de apă

Deci volumul total de apă va cîntări 600×4 = 2 400 g.

Dacă scădem din greutatea vasului cu apă la nivelul B (2 050 g) greutatea a trei sferturi din volumul de apă (3×600 = 1 800 g), obținem greutatea vasului.

Greutate vas=2050—1800=250 grame.

Sau putem adăuga la greutatea de 2050 g de la nivelul B. încă 600 g, cît cîntărește un sfert din greutatea apei (corespunde la $\frac{}{4}$ h, diferența de nivel între A și B) și vom obține greutatea vasului plin cu apă :

2050+600=2650g

Greutate vas=2650—2400=250 grame.

37. Carnetele C.E.C. [+]

Sumele depuse de doi elevi pe carnete CEC sînt în raportul $^1/_3$ (considerăm că cel mai mare are mai mult). Dacă scot fiecare cite 90 lei, raportul sumelor rămase pe carnete devine 1/5. Ce depuneri a avut fiecare elev ?

Răspuns 1 :

Dacă elevul mai mic ar fi scos 30 lei, iar cel mare 90 lei, s-ar fi păstrat raportul inițial 1/3. Să reținem deci raportul $^1/_3$ (la care ne vom referi în continuare), ca fiind raportul dintre suma elevului mic, mai puțin 30 lei, și suma elevului mare, mai puțin 90 lei ; pe aceasta din urmă o considerăm întregul. Scoțînd tot 90 lei, deci

cu 60 lei mai mult decît trebuie, cel mic a înrăutățit raportul în defavoarea sa, ajungînd la 1/5 (raportul dintre suma elevului mic, minus 90 lei și a elevului mare minus 90 lei, care am stabilit că reprezintă întregul, față de care raportăm celelalte sume). Diferența între raportul care ar fi rămas tot $^1/_3$ (dacă se scotea 90 lei și respectiv 30 lei) și raportul final 1/5 (după ce au scos fiecare cîte 90 lei) reprezintă valoric suma de 60 lei scoasă în plus de cel mic. Deci $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ reprezintă valoric 60 lei. Se deduce ușor $\left(\text{împărțind pe 60 la } \frac{2}{15}\text{, adică înmulțind pe 60 cu } \frac{15}{2}\right)$ că întregul $\frac{15}{15}$ reprezintă 450 lei. Aceasta este suma rămasă pe CEC-ul elevului mare, după ce a scos 90 lei, ca fiind întregul, așa cum am stabilit mai sus. Suma depusă inițial de către elevul mai mare a fost 450+90=540 lei, iar aceea a elevului mai mic 540 : 3=180 lei.

Răspuns 2 :

Dacă A este suma depusă pe carnet de elevul mai mic, rezultă — conform textului — că elevul mai mare avea depus inițial 3A. Retrăgînd fiecare cîte 90 lei și raportul sumelor rămase devenind 1/5, putem scrie următoarea ecuație cu o necunoscută :

$$\frac{A-90}{3A-90}=\frac{1}{5}$$

Rezolvînd, rezultă : A=180 lei ; 3A=540 lei.

Notă :

La începutul „Răspunsului 1" am afirmat că, dacă cei doi elevi ar fi scos de la CEC sume al căror raport ar fi fost egal cu raportul inițial $\frac{1}{3}$ (adică 30 lei și respectiv 90 lei), atunci s-ar fi menținut raportul inițial dintre sumele rămase pe carnete. Insistăm puțin asupra acestei afirmații, făcînd demonstrația pentru cazul general.

Fie cele două sume A și B și raportul dintre ele $\frac{1}{n}$;

$$\text{deci}: \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{n}$$

Scădem, atît la numărător, cît și la numitor 1/n din valorile lor și avem :

$$\frac{A - \frac{1}{n}A}{B - \frac{1}{n}B} = \frac{A\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{B\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{A}{B} = \frac{1}{n}$$

Ceea ce era de demonstrat !

38. O premiere în variante

Pentru premierea unor betoniști de la barajul Siriu — jud. Buzău, s-a rezervat o sumă de bani, care a fost împărțită în mai multe plicuri, cîte 1000 lei în fiecare plic ; s-a hotărît ca fiecare premiat să primească cîte un plic cu 1000 lei.

La o nouă analiză s-a menținut suma totală, dar s-a redus numărul celor premiați și s-a convenit ca premierea să se facă diferențiat, în funcție de clasificarea lor, pe baza rezultatelor obținute, astfel încît oricare betonist să ia cu 100 lei mai mult decît cel clasificat după el, dar nici unul să nu primească mai puțin de 1000 lei.

Care a fost suma totală pentru premiere, numărul premiaților și cît a primit fiecare betonist, știind că numărul celor admiși în final la premiere nu a fost mai mare de cinci ?

După cum vedeți, problema este săracă în date de bază, dar bogată în «condiții», situație care vă obligă la raționamente !

Răspuns :

Putînd fi împărțită în plicuri de 1000 lei, suma totală este evident un multiplu de 1000 lei. Ca urmare a reducerii numărului celor premiați — maximum cinci — și a necesității diferențierii cu cîte 100 lei a sumelor primite de fiecare, rezultă că suma dintr-un plic (1000 lei), sau din mai multe plicuri ($n \times 1000$ lei), trebuie împărțită în grupe de sute, astfel încît aceste grupe să fie diferențiate între ele cu 100 lei.

Grupele de sute rezultate dintr-unul sau mai multe plicuri de o mie (ale celor care nu au mai fost premiați) le vom adăuga la

plicurile de cîte 1000 lei, ale celor rămași în final pe lista de premiere, astfel încît grupul cu cele mai multe sute să fie pus în plicul primului premiat, următorul (cu o sută mai puțin) în plicul celui de-al doilea premiat și așa mai departe.

O primă rezolvare o vom găsi dacă observăm că suma primelor patru numere naturale (1+2+3+4) este egală cu 10, exact cîte hîrtii de 100 lei sînt în 1000 lei. Deci putem să luăm 1000 lei dintr-un plic, s-o împărțim în patru grupe de sute lei (100, 200, 300 și 400) și să adăugăm acestea în patru plicuri care aveau deja cîte 1000 lei.

Rezultă că s-a renunțat la premierea unui singur betonist și că au fost premiați în final patru, număr dictat de posibilitatea împărțirii unei mii lei dintr-un plic, în grupe de sute, diferențiate între ele cu 100 lei.

Deci au fost propuși inițial la premiere 5 betoniști, fondul de premiere a rămas constant de 5000 lei, și au fost premiați 4 betoniști care au primit — în ordinea inversă clasificării lor — 1100, 1200, 1300, 1400 lei.

Se observă ușor că problema mai are o soluție, deoarece putem considera că a mai fost premiat încă un betonist, care și-a primit plicul său inițial cu 1000 lei, și care nu a beneficiat de nici un adaos. Soluția respectă condiția de diferențiere cu 100 lei a celor premiați, precum și numărul maxim de 5, al celor admiși în final la premiere.

În această nouă variantă au fost propuși inițial la premiere 6 betoniști, fondul de premiere a fost de 6000 lei, și au fost premiați 5, cu următoarele sume: 1000, 1100, 1200, 1300, 1400 lei.

Și acum vă invit să mai aflați și alte soluții sau variante de premiere. Răspunsul vi se dă la sfîrșitul **capitolului**.

39. O împărțire fără împărțitor

Dacă împărțim numărul 1 157, obținem rest 2. Aflați împărțitorul și cîtul, astfel încît primul să fie un număr format din aceleași cifre. Cîte posibilități sînt? Lucrați numai cu numere naturale (întregi și pozitive) și cu multă «logică matematică».

Răspuns:

Formula generală a împărțirii este $D = I \times C + R$ (unde $D =$ deîmpărțitul, $I =$ împărțitorul, $C =$ cîtul și $R =$ restul).

În cazul nostru: $D = 1\,157$, iar $R = 2$.

Înlocuind în formulă, obținem :

$1\,157 = I \times C + 2$

$1\,155 = I \times C$

Pentru elevii mai mari a rezultat o ecuație cu două necunoscute ! Pentru cei mai mici și pentru amatori, problema care trebuie rezolvată este aceea de a găsi — în condițiile textului — două numere care, înmulțite între ele, ne dau 1 155.

Atît pentru unii cît și pentru alții, I și C se determină din condiția ca I să fie format din aceleași cifre. Pentru aceasta, descompunem numărul 1 155 în produse de factori primi și obținem :

$$1\,155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = I \cdot C$$

În această situație avem patru posibilități de rezolvare :

a) $I = 11$; $C = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

b) $I = 3 \cdot 11 = 33$; $C = 5 \cdot 7 = 35$

c) $I = 5 \cdot 11 = 55$; $C = 3 \cdot 7 = 21$

d) $I = 7 \cdot 11 = 77$; $C = 3 \cdot 5 = 15$

Observați că numerele care reprezintă împărțitorul I sînt formate — de fiecare dată — din aceleași cifre, condiție care a stabilit numărul soluțiilor ! Pentru a avea o soluție unică, este necesar să mai punem o condiție (de exemplu cîtul mai mare decît 100).

40. Problema laborantului [–]

La laboratorul de betoane al unui șantier au rămas 9 kg de ciment, din care — pentru o analiză — trebuie să se separe 2 kg. Șeful laboratorului a plecat pe teren și a încuiat cîntarele și greutățile, cu excepția unei balanțe și a unei greutăți de 250 grame.

Laboranul — un băiat isteț — a realizat acest lucru din trei cîntăriri.

Dumneavoastră știți cum a procedat ?

Nu citiți răspunsul pînă cînd nu încercați variantele dumneavoastră de rezolvare !

Răspuns :

Cîntărirea I

Încărcați cu cele 9 kg de ciment ambele talere ale balanței, în mod egal (balanța rămîne în echilibru), și veți obține pe fiecare taler cîte 9 : 2 = 4,500 kg ciment.

Cîntărirea a II-a

Îndepărtaţi cimentul de pe un taler, iar pe celălalt îl împărţiţi din nou pe cele două talere. Veţi avea acum 4,500 : 2 = 2,250 kg ciment pe fiecare taler.

Cîntărirea a III-a

În această situaţie (cîte 2,250 kg ciment pe fiecare taler), aşezaţi pe unul din talere greutatea de 250 grame.

Este evident că balanţa se va înclina către acest taler şi, pentru a o echilibra, va trebui să luăm de pe acelaşi taler 250 grame ciment. Pe talerul pe care am pus greutatea de 250 grame vom avea : 2,250 kg — 0,250 kg = 2,000 kg ciment.

Mai puteţi găsi o soluţie ? Dar pentru a obţine o cantitate de 1,750 kg ciment ?

41. Roţi, roţi dinţate, curele de transmisie

I. — Roţile din faţă ale unei trăsuri au lungimile cercurilor de 200 cm, iar cele din spate de 425 cm. Însemnăm pe fiecare roată punctele de contact (tangenţă) cu pămîntul. Dacă trăsura parcurge un traseu rectiliniu, după cîte rotaţii se revine la poziţia de plecare ?

II. — Avem trei roţi dinţate, angrenate între ele. Însemnăm într-un fel oarecare poziţiile iniţiale şi apoi le rotim. Dacă roţile au, respectiv : 14, 42 şi 56 dinţi, după cîte rotaţii se revine la poziţia iniţială ?

III. — O curea de transmisie leagă două roţi cu lungimile cercurilor de 35 cm şi respectiv 60 cm.

a) Dacă prima roată face 24 rotaţii, cîte face cea de a doua ?

b) După cîte rotaţii vor reveni în poziţia iniţială ?

Răspunsuri :

R1) Aflăm cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al numerelor care reprezintă lungimile cercurilor.

$$200 = 2^3 \cdot 5^2$$
$$425 = 5^2 \cdot 17$$
$$\text{c.m.m.m.c.} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 17 = 3\,400 \text{ cm} = 34 \text{ m.}$$

Deci, după fiecare 34 m, se revine la poziţia iniţială.

Numărul de rotații ale roții mari va fi : $n = \frac{3400}{425} = 8$, iar ale roții mici $N = \frac{3400}{200} = 17$.

Observație : Raportul dintre numărul de rotații și cel al lungimilor cercurilor este invers proporțional, astfel :

$$\frac{8}{17} = \frac{1}{\frac{425}{200}}$$ (ceea ce se vei

Acest raport se păstrează, indiferent de distanța parcursă.

R2) Idem ca mai sus ! C.m.m.m.c. al celor trei mărimi (14, 42, 56 dinți) este 168, iar numărul de rotații : 12, 4, 3.

R3) — a) A doua roată (cea mare) va face un număr de rotații mai mic, invers proporțional cu lungimile :

$$\frac{n}{24} = \frac{35}{60}$$ Rezultă : $n = 14$.

b) C.m.m.m.c. al numerelor care reprezintă lungimile roților este 420 cm. Deci, după 4,20 m lungime de curea, sau drum descris de fiecare roată, se revine la poziția inițială.

Numărul de rotații se obține împărțind acest drum la lungimile roților și rezultă:

420 : 35 = 12 rotații (roata mai mică).

420 : 60 = 7 rotații (roata mai mare).

42. Un sultan îndrăgostit de logică [+]

„Un sultan dintre aceia ce domnesc peste vreo limbă..." condamnă la moarte — prin tăierea capetelor — trei ostași, pe care, pentru ușurința exprimării, vom conveni să-i numim prescurtat *T*1, *T*2, *T*3.

Înainte de execuție, sultanul — mare „amator" de probleme de matematică recreativă — le acordă o șansă unică, pentru a se salva, supunîndu-i la următoarea probă :

— le arată trei fesuri roșii și două negre ;

— îi așază în șir „indian", deși erau turci, și-i leagă la ochi ;

— le pune la întîmplare cîte un fes pe cap, din cele cinci ;

— îi dezleagă la ochi, dar nu le dă voie să privească decît înainte, astfel încît cel din spate (*T1*) vede fesurile lui *T2* și *T3*, iar *T2* vede fesul lui *T3*. Deci *T3* nu vede nici un fes ;

— pe rînd, începînd cu T1, fiecare va încerca — pe bază de raționamente perfecte — să ghicească culoarea fesului pe care îl are pe cap ;

— dacă unul singur răspunde corect, sultanul îi va ierta pe toți.

Totodată, sultanul, grijuliu, îi asigură că există o cale logică de rezolvare și îi sfătuiește să nu dea răspunsuri întîmplătoare.

Zis și făcut !

T1 privește fesurile din fața sa, judecă corect și, spre dezamăgirea lui și a celorlalți, răspunde : „Nu pot spune culoarea fesului meu".

T2 vede culoarea fesului lui T3, aude răspunsul lui *T1* și continuă seria dezamăgirilor, răspunzînd : „Nu pot spune culoarea...".

T3 aude cele două răspunsuri și, deși nu vede nici un fes, reface raționamentele care au stat la baza răspunsurilor lui *T1* și *T2* și dă răspunsul corect.

Imaginați-vă că sînteți în situația destul de neplăcută a lui *T3* și, folosindu-vă de răspunsurile lui *T1* și *T2*, încercați să „salvați viața" dumneavoastră și a celorlalți doi, dînd răspunsul corect pe baza raționamentelor perfecte ale fiecărui condamnat.

Înainte de a citi răspunsul, încercați unele variante proprii de rezolvare !

Rețineți însă că ultimul turculeț (*T3*), deși avea sabia lui Damocles suspendată deasupra capului său și a celorlalți camarazi, a găsit resursele intelectuale și sîngele rece pentru a raționa perfect, a da răspunsul corect și a salva viața sa și a camarazilor săi.

Răspuns :

T1 vede fesurile lui *T2* și *T3*. Dacă aceștia ar fi avut amîndoi fesuri negre (ați reținut că nu erau decît două !), el ar fi putut afirma cu certitudine că are un fes roșu.

Rezultă că cei din fața lui aveau fie un fes roșu și unul negru, fie amîndoi fesuri roșii și deci el putea avea fes roșu sau negru și în consecință nu se putea pronunța.

T2 face același raționament și ajunge la concluzia lui *T1*, adică el și *T3* nu puteau avea amîndoi fesuri negre ci ambii roșii, sau roșu-negru, sau negru-roșu, după schema de mai jos :

	$T2$	$T3$
Varianta 1 — amîndoi fesuri roșii :	r	r
Varianta 2 — $T2$ roșu, $T3$ negru :	r	n
Varianta 3 — $T2$ negru, $T3$ roșu :	n	r

Observați că varianta negru-negru (n — n) a fost exclusă prin răspunsul lui $T1$!

Dacă $T2$ ar fi văzut la $T3$ fes negru, ne aflam în varianta 2 (unică pentru culoarea fesului acestuia) și atunci el putea afirma că are fes roșu. Faptul că $T2$ nu a dat un răspuns pozitiv, arată că a văzut la $T3$ culoarea roșie (varianta 1 sau 3), ceea ce înseamnă că el putea avea fes roșu sau negru, deci nu se putea pronunța ! Urmăriți schema de mai sus !

$T3$ reface raționamentele celorlalți doi, știe că se află într-una din cele două variante (1 sau 3) și afirmă cu certitudine că are un fes roșu.

43. La o stație de betoane [—]

Rețeta emisă de laboratorul unui baraj prevede adăugarea a 4 litri de plastifiant (lichid), peste componentele obișnuite (nisip, pietriș, piatră, ciment, apă), în scopul măririi lucrabilității betonului la punerea în operă.

Operatorul de la stația de betoane are într-un rezervor 8 litri din acest plastifiant și dispune de o măsură de 3 litri și una de 5 litri. Cum separă el cei 4 litri necesari, pe bază de măsurători exacte ?

Răspuns :

Se umple vasul de 3 litri și se trece lichidul în cel de 5 litri. Se umple din nou vasul de 3 litri și se trec 2 litri în cel de 5 litri. În acest fel în vasul de 3 litri a rămas 1 litru. Se golește vasul de 5 litri în rezervorul inițial, se trece 1 litru din vasul de 3 litri în cel de 5 litri, se umple din nou vasul de 3 litri și se trece tot în vasul de 5 litri. Am obținut astfel 4 litri plastifiant în vasul de 5 litri, pe care îi putem turna în betonieră (evident, în rezervorul inițial au rămas tot 4 litri).

44. O monedă falsă [—]

Aveți 9 monezi, din care una este falsă, făcută dintr-un metal mai ușor decît monezile bune. Dacă dispuneți de o balanță, cum puteți identifica moneda falsă prin maximum două cîntăriri ?

Răspuns :

Cîntărirea I

Se așază pe fiecare taler al balanței cîte trei monezi. Dacă balanța rămîne în echilibru, rezultă că moneda falsă se află în ultima grupă de trei monezi pe care le-am lăsat deoparte și în acest caz vom reveni la acestea cu cea de a doua cîntărire (cazul a).

Dacă balanța nu rămîne în echilibru, conchidem că moneda falsă se află printre cele trei de pe talerul mai ridicat ; de aceste trei monezi (cazul b) ne vom ocupa — de asemenea — la cîntărirea a doua.

Cîntărirea a II-a

Din grupa de trei monezi (cazul a sau b) în care — conform raționamentelor de mai sus — a rezultat că se află și moneda falsă, luăm două monezi oarecare și le așezăm pe cîte un taler. Dacă balanța rămîne în echilibru atunci moneda falsă este cea de a treia, pe care nu am așezat-o pe taler. Dacă balanța se dezechilibrează, atunci — evident — moneda falsă se află pe talerul mai ridicat (conform textului).

45. O frumoasă problemă de geografie [+]

Priviți, sau imaginați-vă că priviți globul pămîntesc, care are trasate pe el paralele și meridianele ! Evident, nu vor lipsi cei doi poli și fierbintele ecuator.

După ce îl studiați bine, în scopul reîmprospătării cunoștințelor pe care le-ați acumulat despre Terra, la lecțiile de geografie, vi se cere să găsiți un punct, pe acest glob, din care, parcurgînd către sud o distanță oarecare, *D*, apoi către est sau vest aceeași distanță și apoi către nord, din nou distanța *D*, să reveniți exact în punctul de plecare.

Ca efortul să nu fie prea mare, reduceți distanța *D* la dimensiunile care corespund condiției fizice pe care o dețineți la această oră ! Sau, mai bine, parcurgeți aceste distanțe cu creionul pe globul pămîntesc din casă, sau pe desenul pe care îl puteți face singur.

Dacă la o asemenea întrebare s-a mai răspuns în trecut și de fiecare dată s-a găsit un singur punct, acum vi se cere să găsiți un al doilea punct, sau chiar o categorie de puncte, care să satisfacă condițiile problemei.

Răspuns :

1. Primul răspuns este polul nord ! Dacă plecați de aici către sud, înseamnă că mergeți pe un meridian, vă opriți la orice dintanță *D* fixată de dumneavoastră, parcurgeți apoi către est sau vest aceeași distanță *D* (sau oricare !) pe paralela pe care ați ajuns și vă întoarceți către nord parcurgînd distanța *D* pe un alt meridian, care ca toate meridianele converg și către polul nord. Ați rezolvat astfel problema ce vi s-a dat.

Dacă lungimea cercului paralel este din întîmplare egală cu *D*, sau un submultiplu al acesteia, veți avea șansa să reveniți la polul nord pe același meridian pe care ați coborît. Această situație o veți putea întîlni numai în cazul în care distanța *D* este atît de mare, încît — atunci cînd coborîți de la polul nord — să puteți ajunge undeva la sud de ecuator, deci către polul sud.

2. Pentru al doilea răspuns, considerați pe glob două cercuri paralele *P*1 și *P*2 așezate la distanța *D*, astfel încît lungimea cercului paralel *P*2 amplasat către sud să fie egală cu *D*, sau să fie un submultiplu al acesteia.

Porniți la drum, acum, din orice punct al paralelei *P*1, conform textului : către sud -distanța *D*, pe meridianul pe care vă aflați și veți ajunge pe paralela *P*2 ; mergeți apoi pe această paralelă către est sau vest și parcurgeți, de asemenea, distanța *D*. În cazul în care lungimea acestei paralele este egală cu *D* (prima subvariantă propusă în text) înseamnă că ați revenit pe meridianul de pe care ați plecat, parcurgînd o singură dată lungimea cercului paralel *P*2. Dacă lungimea paralelei este un submultiplu al lui *D*, înseamnă că veți parcurge de mai multe ori paralela *P*2, dar veți reveni neîndoios pe același meridian, mai precis la intersecția meridianului pe care ați călătorit de la nord la sud, cu paralela *P*2. Fiind pe meridianul de pe care ați plecat, întoarcerea către nord se va face — evident — tot pe el și, ajungînd pe primul cerc paralel *P*1, veți reveni exact în punctul de plecare.

Avînd în vedere că se poate pleca din orice punct al paralelei *P*1 și executînd „crosurile" de mai sus, se va reveni în punctul de plecare și, ținînd seama că cercul paralel *P*1 are — ca orice cerc

— o infinitate de puncte, rezultă că acest al doilea răspuns ne oferă un număr infinit de soluţii.

Şi dacă mai observaţi că pe glob putem găsi un număr infinit de perechi de cercuri paralele $P1$ şi $P2$ care satisfac condiţiile problemei, atunci veţi concluziona că avem o dublă infinitate de soluţii.

Practic, dacă veţi alege mai întîi un cerc paralel $P2$, situat undeva la sud de ecuator, a cărui lungime o veţi nota cu L (mai mică decît distanţa — măsurată pe un meridian — pînă la polul nord), apoi, veţi parcurge către nord tot distanţa L (notată iniţial cu D), pe oricare meridian şi veţi ajunge pe un cerc paralel, pe care îl puteţi nota cu $P1$, atunci veţi avea una din infinitatea de „scheme", care vă oferă soluţii corecte. Dacă lungimea paralelei $P2$ este egală cu distanţa pînă la Polul nord, atunci veţi reveni la prima variantă a problemei.

46. O problemă mai dificilă [+]

Găsiţi două numere întregi de ordinul doi (zecilor) — consecutive, care înmulţite între ele să ne dea un număr de ordinul trei (sutelor), ale cărui cifre să fie consecutive.

Atenţie la text !

Indicaţii :

1) Exemple de numere consecutive de ordinul doi sînt uşor de găsit, de exemplu 17 şi 18, sau 24 şi 25 etc. Dacă sînt crescătoare sau descrescătoare nu are nici o importanţă, produsul lor fiind acelaşi.

2) Numerele de ordinul trei pot avea cifrele consecutive crescătoare (ex. 234, 789 etc.), sau descrescătoare (987, 543 etc.).

3) Începeţi rezolvarea făcînd unele consideraţii referitoare la înmulţirea a două numere consecutive formate dintr-o singură cifră.

Răspuns :

Vom face mai întîi o observaţie deosebit de importantă : produsul a două numere consecutive formate dintr-o singură cifră, ne dă un număr care se termină cu cifra 0 ; 2 sau 6. Verificăm : $0\times1=0$; $1\times2=2$; $2\times3=6$; $3\times4=12$; $4\times5=20$; $5\times6=30$; $6\times7=42$; $7\times8=56$; $8\times9=72$. Deci, numărul de ordinul trei (al sutelor) — rezultat al înmulţirii a două numere consecutive de ordinul doi — va avea la unităţi una din cifrele 0 ; 2 sau 6.

În această situație și ținînd seama de faptul că rezultatul înmulțirii [illegible] să aibă cifrele consecutive, din care ultima este 0 ; 2 sau 6, conchidem că acest număr va putea fi :

a) cu cifre în ordine crescătoare numai 456 (0 și 2 la unități nu ne pot da numere de ordinul sutelor) ;

b) cu cifre în ordine descrescătoare : 210, 432 și 876

Și acum este ușor de găsit care din aceste patru numere este rezultatul înmulțirii a două numere consecutive de ordinul doi :

— pentru 456, vom încerca cu $20 \times 21 = 420$ și $21 \times 22 = 462$. Am găsit două rezultate care încadrează numărul 456, deci, nu există două numere consecutive și întregi, care înmulțite între ele să ne dea acest număr ! De altfel, nici produsul cifrelor de la unități nu ne dă un număr terminat cu cifra 6.

— pentru 432, idem ca mai sus (se încadrează în limitele 420 și 462) ;

— pentru 210, găsim ușor, că e rezultatul înmulțirii 14×15. Soluția satisface condițiile problemei.

— pentru 876, încercăm cu $29 \times 30 = 870$ și $30 \times 31 = 930$. Deci acest număr nu ne conduce la o soluție.

Rezultă că soluția $14 \times 15 = 210$ este unică.

Și acum, o problemă mult mai ușoară : găsiți două numere consecutive de ordinul I (unități), care înmulțite între ele să ne dea un număr de ordinul II (zeci) cu cifre consecutive. Sînt două perechi de astfel de numere și, pentru verificarea corectitudinii răspunsului, revedeți observația făcută mai sus (înmulțirea a două numere consecutive formată dintr-o singură cifră).

47. Creangă și matematica recreativă [—]

Vă reamintesc în rezumat povestea lui Creangă : trei drumeți se ospătează, primul avînd trei pîini, al doilea două pîini, iar al treilea nici una ; drept plată, ultimul le dă celorlalți 5 lei și pleacă. Cum trebuie să-și împartă această sumă, primii doi drumeți, știind că au consumat toți în mod egal ?

Răspuns :

Împărțiți fiecare pîine în cîte trei părți egale și veți obține în total $5 \times 3 = 15$ treimi de pîine. Rezultă că fiecare drumeț a consumat cîte 5 treimi de pîine.

Primul drumeț a avut 3 pîini, deci $3 \times 3 = 9$ treimi de pîine, din care a consumat 5 treimi și au rămas pentru cel de al treilea dru-

meţ 4 treimi. Un calcul similar ne duce la concluzia că cel de al doilea drumeţ a dat celui de al treilea doar o treime de pîine. Deci, cel de al treilea drumeţ a consumat 4 treimi de pîine de la primul drumeţ, care va trebui să primească patru lei, şi o treime de la cel de al doilea, care va primi numai un leu.

48. O adunare englezească [+]

Fără a fi nevoie să cunoaşteţi limba engleză, sînteţi invitaţi să rezolvaţi următoarea adunare :

FORTY+TEN+TEN=SIXTY

Sau în româneşte :

Patruzeci+zece+zece=şasezeci

După cum vedeţi, propoziţia este corectă. Dumneavoastră vă revine sarcina să înlocuiţi literele cu cifre, astfel încît adunarea să fie corectă şi din punct de vedere matematic.

Facem menţiunea că fiecare literă reprezintă o cifră distinctă.

Rezolvare :

Adunarea dată prin temă o punem sub forma :

```
F O R T Y+
    T E N
    T E N
---------
S I X T Y
```

Şi acum, să raţionăm :

a) Y+N+N=Y ne duce la concluzia că N=0 sau N=5, pentru că rezultatul are la unităţi pe Y.

b) Raţionament similar pentru T+E+E=T, deci E=0 sau E=5. Observaţi însă că de la prima adunare, Y+N+N, nu reportăm nimic (am putea reporta cel mult 1, în cazul în care N=5), deoarece ultima cifră a adunării următoare, aceea a unităţilor, rămîne T. Rezultă : N=0 şi pentru că E trebuie să fie diferit de N, pe baza raţionamentelor de mai sus, conchidem : E=5.

In plus, reţinem că de la T+E+E vom reporta 1 pentru adunarea următoare R+T+T.

c) R+T+T+1 trebuie să ne dea un număr mai mare ca 10 sau ca 20 deoarece mai departe la O trebuie să adăugăm ceva (1 sau 2) pentru a ne da o cifră diferită, şi anume I. Observaţi că şi S e

diferit de F (și anume $S = F+1$), deci O trebuie să fie suficient de mare (8 sau 9) pentru ca, adunat cu ceea ce reportăm de la $R+T+T+1$, să ne dea 10 sau 11, astfel încît în continuare la F să adăugăm 1, pentru a obține S diferit de F.

Varianta $R+T+T+1$ cu valoarea cuprinsă între 10 și 19 o eliminăm, deoarece ar însemna că reportăm 1, care adunat cu O (în acest caz neapărat 9) ne-ar da $I=0$, ceea ce contravine textului, pentru că am stabilit mai sus că $N=0$ (literele trebuie să aibă valori diferite).

Rămîne varianta $R+T+T+1$ mai mare ca 20. În acest caz $O = 9$ pentru ca adunat cu 2 (reportul anterior) să ne dea 11, deci $I=1$ și pentru F să reportăm de asemenea 1, pentru a ne da S ($S=F+1$).

Dacă $O = 9$, rezultă $T \neq 9$ și $R \neq 9$.

d) Să facem alături un tabel în care să trecem corespondența stabilită pînă acum dintre litere și cifre, pentru a vedea ce valori vom putea atribui literelor neidentificate pînă acum :

N=0	Y=
E=5	T=
O=9	R=
I =1	X=
	F=
	S=

Observați că avem 10 litere, și trebuie să găsim corespondentele lor 10 cifre !

Pînă acum am găsit doar patru asemenea corespondențe.

e) Revenim la $R+T+T+1$. Din cele arătate la pct. c) rezultă că R și T vor avea valori mai mici decît 9, însă suficient de mari pentru ca suma $(R+T+T+1)$ să fie mai mare decît 20.

În primul rînd, observați că această sumă nu poate fi 20 sau 21, deoarece ar rezulta $X=0$ sau $X=1$, (cifra de la unități), valori stabilite pentru alte litere. Singurele combinații ce se pot face, în condițiile stabilite mai sus, sînt următoarele :

(I) $R+T+T+1=6+8+8+1=23$
(II) $R+T+T+1=7+8+8+1=24$
(III) $R+T+T+1=8+7+7+1=23$

Rezultă X egal cu 3 sau 4 (cifrele unităților de la 23 și 24).

Din tabloul de la punctul d, au rezultat următoarele cifre disponibile, pe care le putem atribui literelor :

2, 3, 4, 6, 7, 8.

Să analizăm cele trei relații de mai sus, ținînd seama și de condiția de a păstra două cifre consecutive pentru S și F.

Din relația (I) pentru R = 6 și T = 8, rezultă X = 3. În acest caz, din tabelul cifrelor disponibile (arătate mai sus) nu ne mai rămîn două cifre consecutive pentru S și F ! Concluzie identică rezultă și pentru relația (III), în care : R=8 ; T=7 ; X=3.

În relația (II) pentru R=7 și T=8, rezultă X=4 (cifra unităților), rămînînd disponibile cifrele consecutive 2 și 3. Ținînd seama de egalitatea stabilită anterior S=F+1 rezultă S=3 și F=2. Soluțiile satisfac condițiile problemei și sînt unice.

Pentru Y rămîne cifra 6, singura disponibilă, deci Y=6.

Adunarea noastră este acum :

```
29 786+
   850
   850
-------
31 486
```

49. Nuferii și lacul [—]

Pe un lac apar într-o zi doi nuferi, în ziua următoare apar patru, apoi opt și tot așa mai departe, nuferii își dublează numărul în fiecare zi, față de ziua precedentă. Observați că numărul zilelor crește în progresie aritmetică cu rația 1, iar numărul nuferilor crește în progresie geometrică cu rația 2, primul termen al progresiei fiind tot 2.

Dacă suprafața lacului se umple cu nuferi în 18 zile, răspundeți în cîte zile va fi acoperită cu nuferi o optime din suprafața lacului, dar un sfert din ea ?

Răspuns :

Jumătate din suprafața lacului va fi acoperită în 17 zile, un sfert din ea în 16 zile, iar o optime în 15 zile, pentru că — după cum am văzut — ea se dublează în fiecare zi. Observația din text cu referire la progresii a fost strecurată cu intenția de a vă «încurca» puțin !

50. Pisica la ecuator

Să considerăm ecuatorul perfect circular, cu lungimea de 40 054 km și să îl încingem cu un cerc de oțel de aceeași lungime, lipit de suprafața pămîntului (uscat sau apă).

Apreciați cu cît trebuie mărită această lungime a cercului de oțel, pentru ca o pisică de 25 cm înălțime să poată trece pe sub el, prin orice loc al ecuatorului. Deci cercul de oțel să se depărteze de ecuator, simultan, în toate punctele, cu 25 cm.

După ce ați făcut o astfel de aproximație, calculați exact și comparați rezultatele! (Nu uitați că lungimea cercului ecuatorial este de 40 054 km, sau 40 054 000 m, sau 4 005 400 000 cm (adică mai mult de patru miliarde de cm)! Raza cercului ecuatorial este R=6 378 km=6 378 000 m.

Încercați să treceți și un om cu înălțimea de 1,75 m!

Vă reamintesc că lungimea unui cerc este $L=2\pi R$.

Răspuns :

1. Îndepărtarea simultană a acelui cerc de oțel cu 25 cm de cercul ecuatorial, cu lungimea de 40 054 km, pe toată circumferința sa, pare a necesita o lungime considerabilă de cablu suplimentar. Sînteți de acord?

În realitate, dacă raza cercului (R=6 378 km) va crește cu 0,25 m lungimea cercului (cablului) va crește cu numai $2\pi \cdot 0,25$ m$=6,28 \times 0,25=1,57$ m. Urmăriți calculele de mai jos!

L ecuatorului (cablul inițial) $= 2\pi R=6,28 \times 6\,378=40\,054$ km.

L cablului mărit$=2\pi\ (R+0,25)= 2\pi R+\ 2\pi 0,25=40\,054$ km$+$
$+1,57$ m $= 40\,054\,001,57$ m

2) Pentru ca omul să treacă nestingherit, în orice loc la ecuator, pe sub cercul de oțel, e necesar ca acesta să fie mărit cu numai $6,28 \times 1,75=10,99$ m $\simeq 11$ m

Notă : faceți o legătură între această problemă și cercurile butoaielor.

51. Melc alpinist [–]

a) Un melc urcă în timpul zilei pe un copac 3 m și alunecă noaptea 2 m. După cîte zile ajunge în vîrful copacului înalt de 10 m?

b) Aceeași problemă dacă ziua urcă 3 m, iar noaptea coboară 1 m, trebuind să «escaladeze» un copac de 13 m.

Răspuns :

a) În ultima zi va urca 3 m (nu ținem seama de coborîrea din noaptea care urmează, pentru că el a ajuns deja în vîrful copacului !). Restul de 10—3=7 m l-a parcurs cu o viteză de 1 m/zi, deci în 7 zile. La aceasta adăugăm ziua în care a urcat 3 m și vom constata că melcul a ajuns la ținta sa după 8 zile.

b) Prin raționament analog rezultă 6 zile.

52. Într-un laborator [—]

Avem 7 kg de ciment și dispunem pentru cîntărire de o balanță și o greutate de 1 kg.

Să se separe o cantitate de 3 kg ciment, printr-o singură cîntărire.

Răspuns :

Se așază pe un taler greutatea de 1 kg, apoi se împarte cimentul pe cele două talere, pînă cînd echilibrăm balanța. Pe fiecare taler vom avea cîte 4 kg (7 kg ciment plus 1 kg greutatea de metal).

Pe talerul cu greutatea de metal de 1 kg vom avea 3 kg ciment, iar pe celălalt 4 kg.

53. Împărțirea unui polinom de grad oarecare cu (x—a).

Restul împărțirii unui polinom de grad oarecare în x, cu binomul (x—a) de gradul I, este egal cu valoarea pe care o ia polinomul cînd înlocuim pe x cu +a. Dacă valoarea restului este zero, afirmăm că împărțirea se face exact. Sperăm că v-ați amintit ușor această teoremă și de aceea vi se cer următoarele :

1) Demonstrați teorema (e o demonstrație foarte simplă !).

2) Ce se întîmplă cînd în binomul de gradul I (împărțitorul), x are coeficient diferit de 1 ?

După aceea vom face și o aplicație interesantă.

Răspuns 1 :

Un polinom în x de un grad oarecare îl notăm cu P(x).

Dacă îl împărțim la (x—a), vom avea un cît Q și un rest R, după formula cunoscută :

$$P(x) : (x-a) = Q + \frac{R}{x-a} \text{ sau}$$

$$P(x) = (x-a)Q + R$$

Dacă înlocuim pe x cu +a vom avea :

P(a)=(a—a)Q+R sau, pentru că a—a=o și termenul în Q este nul, rezultă :

P(a)=R. Ceea ce era de demonstrat.

Observație :

Semnul lui *a* poate fi plus sau minus. Deci dacă trebuia să împărțim P(x) la (x+a), atunci restul împărțirii ar fi avut valoarea R=P(—a).

Răspuns 2 :

Dacă împărțitorul este de forma (mx—a), vom avea conform celor de mai sus :

$$P(x)=(mx-a)Q+R$$

Pentru a anula termenul care conține pe Q, este necesar ca mx—a=o, respectiv $x=\frac{a}{m}$ și deci în egalitatea de mai sus vom înlocui pe $x=\frac{a}{m}$

$$P\left(\frac{a}{m}\right)=\left(m\cdot\frac{a}{m}-a\right)Q+R$$

$$P\left(\frac{a}{m}\right)=(a-a)Q+R$$

$P\left(\frac{a}{m}\right)=R$ sau invers, restul $R=P\left(\frac{a}{m}\right)$

Aplicație :

Suma coeficienților unui polinom în x de gradul 14 este 73. Să se afle suma coeficienților restului împărțirii acestui polinom cu (x—1), știind că împărțirea nu se face exact.

Ce modificări trebuie aduse textului problemei, pentru ca împărțirea să se facă exact ?

Răspuns 1

Restul împărțirii P(x) cu (x—1) va avea un grad imediat inferior împărțitorului (x—1), deci va fi de gradul zero în x, adică

va fi un număr, a cărui valoare va fi R=P(+1)=73, exact sum coeficienţilor polinomului, deoarece înlocuind pe x cu +1, at valoarea cît şi semnul termenilor polinomului sînt egali cu coef cienţii polinomului. Gradul polinomului nu are nici o importan în acest caz.

Răspuns 2

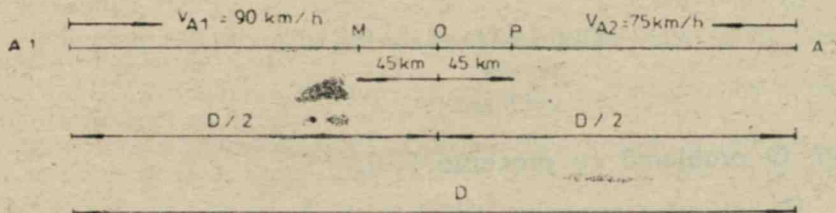
Pentru ca împărţirea să se facă exact, ar trebui ca R=P(+1)= adică suma coeficienţilor polinomului să fie zero, nu 73.

54. Două automobile

Din două localităţi pleacă simultan cîte un automobil (un către celălalt) şi se întîlnesc la 45 km de jumătatea distanţei din tre localităţi.

Automobilul A1 are o viteză de 90 km/h, iar automobilul A o viteză de 75 km/h. Aflaţi după cîte ore s-au întîlnit cele dou maşini şi distanţa dintre localităţi.

Răspuns :



a) Urmăriţi schema de mai sus !

A1 avînd o viteză mai mare decît A2, punctul P de întîlni al automobilelor se va afla la dreapta lui O (mijlocul distanţ dintre localităţi), respectiv la 45 km de acesta.

Dacă ar fi avut viteze egale, cînd A2 s-ar fi aflat în P, A1 s- fi aflat în M (tot la 45 km de O). Faptul că se întîlnesc în P, r arată că A1 a parcurs 90 km mai mult decît A2 (45 km din stîng şi 45 km din dreapta lui O). Diferenţa vitezelor este de 90—75= =15 km/h. Deci în fiecare oră, A1 a parcurs 15 km mai mult d cît A2. Rezultă că pentru a parcurge 90 km mai mult, A1 a avu nevoie de 90 km : 15 km/h=6 ore.

b) Distanţa D între localităţile de plecare se află foarte uşo însumînd drumurile parcurse de cele două maşini D=6 h×90 km +6 h×75 km/h=990 km.

Sau, mai simplu : însumăm cele două viteze ($90+75=165$ km/h), ca și cînd distanța ar fi parcursă de un singur automobil, a cărui viteză este egală cu suma vitezelor celor două automobile.

În 6 ore se va parcurge distanța $D=6\times165=990$ km.

55. O problemă cu vîrstele

Un tată are 41 ani și patru copii de 8 ; 6 ; 4 și 2 ani. După cîți ani tatăl va avea vîrsta egală cu suma vîrstelor copiilor (la acea dată) ?

Rezolvări :

a) *aritmetică*

În prezent, suma vîrstelor celor patru copii este de 20 ani, deci cu 21 de ani mai puțin decît vîrsta tatălui. În fiecare an (tatăl adaugă evident un an, iar copiii patru ani), diferența se micșorează cu trei ani. Rezultă că în șapte ani ($21:3=7$) vom obține egalitatea cerută prin text.

b) *algebrică*

$$8+6+4+2+4x=41+x$$
$$3x=21$$
$$x=7 \text{ ani.}$$

56. O problemă cu procente [—]

Un tată (deși recurgem destul de des la el, în această culegere) oferă fiului său o sumă de bani pentru cinema, cofetărie etc. Dar cum nu vrea să scape ocazia de a-i mai aminti de lecțiile de matematică, îi dă posibilitatea să aleagă una din variantele :

a) 30% din 60 de lei.

b) 60% din 30 de lei.

Dumneavoastră ce sfat îi dați copilului ?

În loc de răspuns. Fiul zîmbește și îi replică : „N-am să-ți dau restul 2 lei, așa că e mai comod pentru amîndoi, să-mi dai — în oricare din variante — două hîrtii de cîte 10 lei".

57. Cîntarul fără gradații [—]

Mai mulți elevi fac o vizită într-o uzină. La un moment dat, unul din ei vede un cîntar și se suie pe el. Acul indicator al cîn-

tarului se rotește către dreapta, dar — spre dezamăgirea elevului — cadranul cîntarului indică greutățile numai de la 200 kg în sus. Cum procedează totuși elevul nostru pentru a-și afla greutatea ? (eventual și a celorlalți).

Răspuns :

Se suie pe cîntar mai mulți elevi, astfel încît greutatea totală să depășească 200 kg, cu greutatea celui mai voinic dintre ei. Coborînd apoi pe rînd cîte unul, prin diferența dintre greutatea totală și aceea fără el, se află greutatea fiecăruia. Elevul care și-a aflat greutatea se urcă înapoi pe cîntar, pentru a se reface de fiecare dată greutatea totală.

58. **Un număr divizibil cu 15**

Să se afle cifrele a și b, astfel ca numărul $\overline{25a7b}$ să fie divizibil cu 15. Ce condiție trebuie să punem pentru ca să avem o soluție unică ?

Răspuns :

a) Pentru a fi divizibil cu 15, numărul dat trebuie să fie divizibil cu 3 și cu 5.

Criteriul divizibilității cu 5 ne conduce la concluzia că b trebuie să fie egal cu 0 sau 5.

Pentru a fi divizibil și cu 3, suma cifrelor numărului trebuie să se împartă la 3. Cum suma cifrelor cunoscute $2+5+7=14$ vom avea :

— pentru b=o => a = { 1 (suma cifrelor este $14+1=15$), 4 (suma cifrelor este $14+4=18$), 7 (suma cifrelor este $14+7=21$) }

— pentru b = 5 => a= { 2 (suma cifrelor este $14+5+2=21$), 5 (suma cifrelor este $14+5+5=24$), 8 (suma cifrelor este $14+5+8=27$) }

Rezultă că vom avea șase numere care răspund condițiilor problemei :

pentru b = 0 numerele sînt : 2 5 1 7 0; 2 5 4 7 0; 2 5 7 7 0

pentru b = 5 numerele sînt : 2 5 2 7 5; 2 5 5 7 5; 2 5 8 7 5

b) Pentru a avea o soluție unică, trebuie să punem — de exemplu — una din condițiile :

— a și b să fie consecutive (soluția este 25 170).

— a și b să fie egale (soluția este 25·575).

59. Un număr divizibil cu 18

Să se afle cifrele a și b consecutive, asftel încît numărul $\overline{124ab}$ să fie divizibil cu 18.

Răspuns :

— Notăm cifrele consecutive ale zecilor și unităților cu „a" și „a + 1", sau „a" și „a — 1" (am eliminat astfel litera „b" ca cifră a unităților).

— În această situație, numărul poate lua formele :

(I) $\overline{1\ 2\ 4\ a\ a+1}$ (a și a + 1 sînt consecutive crescătoare) ;

(II) $\overline{1\ 2\ 4\ a\ a-1}$ (a și a — 1 sînt consecutive descrescătoare) ; (reprezentînd de la dreapta spre stînga : unități, zeci, sute, mii, zeci de mii).

— Pentru ca aceste numere să fie divizibile cu 18 este necesar și suficent ca ele să fie divizibile cu 2 și cu 9.

Pentru a fi divizibile cu 2, trebuie ca numerele să fie pare, respectiv cifrele de la unități să fie cu soț, deci (a + 1) și (a — 1) să fie cu soț. Rezultă imediat că „a" este fără soț.

Am stabilit deci că cifra zecilor va fi fără soț, iar aceea a unităților va fi cu soț.

Mai departe ținem seama de condiția ca numărul căutat să fie divizibil și cu 9, deci suma cifrelor sale trebuie să dea un număr care să se dividă cu 9 (regula divizibilității unui număr cu 9).

Pentru aceasta observăm că suma primelor trei cifre cunoscute $1 + 2 + 4 = 7$, deci suma ultimelor două cifre (care trebuie să fie consecutive) va trebui să fie sau 2 (adunat cu 7 ne dă 9), sau 11 (adunat cu 7 ne dă 18). Nu luăm în considerare și ipoteza ca suma ultimelor două cifre să fie 20 (adunat cu 7 ar da 27, deci divizibil cu 9), pentru motivul că nu există două numere consecutive formate dintr-o singură cifră a căror sumă să ne dea 20 (cele mai mari ar fi 9 și 8, care adunate dau 17). Și mai mult : observăm că suma a două numere consecutive este totdeauna un număr fără soț ! Deci se elimină și ipoteza ca suma ultimelor două cifre să fie egală cu 2.

Rezultă că suma ultimelor două cifre trebuie să fie 11. Deoarece trebuie să fie consecutive, ele nu pot fi decît 5 și 6 sau 6 și 5. Din condiția ca cifra unităților să fie cu soț, iar a zecilor fără soț, rezultă că $a = 5$, $a + 1 = 6$, iar numărul căutat va fi 12456.

60. Paginile unei cărți

Pentru a se numerota paginile unei cărți au fost necesare 1791 de cifre. Cîte pagini a avut cartea ?

Răspuns :

De la 1 la 9 sînt 9 pagini și s-au folosit 9 cifre (o cifră sau un număr de fiecare pagină).

De la 10 la 99 sînt 90 de pagini, deci s-au folosit $2 \times 90 = 180$ cifre (2 cifre de fiecare pagină).

(Atenție : între 10 și 99 nu sînt $99 - 10 = 89$ pagini, ci $99 - 9 = 90$ pagini, deoarece se include și pagina 10).

De la 100 la 999 sînt 900 de pagini, deci s-au folosit $3 \times 900 = 2700$ de cifre (3 cifre de fiecare pagină), deci mai multe decît avea cartea noastră (1791).

Rezultă că nu avem nevoie de toate numerele cu trei cifre (între 100 și 999).

Scădem din 1791 de cifre cîte au fost necesare pentru paginarea cărții, 9 cifre (pentru primele 9 pagini) și 180 cifre (pentru încă 90 pagini), adică scădem $180 + 9 = 189$ cifre.

$$1791 - 189 = 1602 \text{ cifre.}$$

Aceste 1602 cifre au mai fost necesare pentru restul paginilor (peste cele 99 pagini numerotate cu una sau două cifre).

Fiecare pagină de la 100 în sus necesită cîte trei cifre, deci cele 1602 cifre au folosit pentru $1602 : 3 = 534$ pagini.

În concluzie cartea a avut $9 + 90 + 534 = 633$ pagini.

Verificare :

paginile $1 \div 9$	$1 \times 9 =$	9 cifre
paginile $10 \div 99$	$2 \times 90 =$	180 cifre
paginile $100 \div 633$	$3 \times 534 =$	1602 cifre
	Total	1791 cifre

61. Aveţi spirit de observaţie ?

Înmulţirea cu 2 a numărului 105 263 157 894 736 842, oricît de mare ar fi el, nu e o problemă pentru nimeni, de aceea sînteţi invitaţi să o efectuaţi imediat şi apoi să răspundeţi la următoarele întrebări :

a) Cum putea fi determinat rezultatul fără a face operaţia de înmulţire ? Sau, care este deosebirea dintre cele două numere ?

b) Ştiţi să-l citiţi ? (rezultatul are evident acelaşi ordin de mărime !).

Răspuns :

a) Rezultatul înmulţirii se putea obţine prin simpla mutare a cifrei 2 de la unităţi, în faţa primei cifre (în cazul nostru 1).

b) 105 biliarde, 263 bilioane, 157 miliarde, 894 milioane, 736 mii, 842.

62. O împărţire cu o singură cunoscută la cît [+]

Vi se dă împărţirea de mai jos, la care nu se cunoaşte decît cifra sutelor de la cît şi care — aşa cum se vede — are valoarea 8. Contrar sistemului uzitat de a nota cifrele necunoscute cu steluţe (sau x), pentru uşurinţa demonstraţiei noi am notat cifrele deîmpărţitului cu litera „d" însoţită de un indice ($1 \div 8$), care ne arată şi ordinul de mărime, pe cele ale împărţitorului cu $i_1 \div i_3$, ale cîtului $c_1 \div c_5$, iar pentru operaţiile de sub deîmpărţit am folosit diverse litere ale alfabetului, păstrînd indicele cifrelor de la deîmpărţit. Restul împărţirii — se vede foarte clar — este zero, deci împărţirea se face exact ! Dumneavoastră vă revine sarcina să refaceţi împărţirea, pe bază de raţionamente specifice acestei operaţii de ordinul doi, adică să determinaţi toate cifrele necunoscute.

$$
\begin{array}{r|l}
d_8d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1 & i_3\ i_2\ i_1 \\
\underline{a_7a_6a_5} & \overline{c_5\ c_4\ 8c_2\ c_1} \\
b_6b_5b_4b_3 & \\
\underline{e_5e_4e_3} & \\
f_4\ f_3\ d_2d_1 & \\
\underline{f_4\ f_3\ d_2d_1} & \\
==== &
\end{array}
$$

Răspuns :

I — A doua cifră de la cît, de la stînga la dreapta (c_4), este zero, deoarece după prima scădere din deîmpărțit a trebuit să coborîm în afara lui d_4 și pe d_3, ceea ce înseamnă că $b_6b_5d_4$ era mai mic decît împărțitorul ($b_6b_5d_4 < i_3i_2i_1$).

Reținem această considerație, precum și faptul că $c_4=0$.

II — Același raționament pentru c_2 (observați că am coborît de la deîmpărțit pe d_2 și d_1). Deci $c_2=0$ și $f_4f_3d_2 < i_3i_2i_1$.

III — Din înmulțirea lui 8 (de la cît) cu împărțitorul a rezultat un număr de ordinul sutelor ($e_5e_4e_3$). Deci $i_3i_2i_1$ poate avea valoarea maximă 124, ($8 \times 124 = 992$). Rezultă ușor că $i_3 = 1$. Din considerația de la I ($b_6b_5d_4 < i_3i_2i_1$) deducem că $b_6 = 1$, iar b_5 poate fi zero, unu, sau doi. Deci b_6b_5 poate fi maximum 12.

IV — Înmulțirea lui c_1 cu împărțitorul ne-a dat un număr de ordinul miilor $f_4f_3d_2d_1$, deci c_1 trebuie să fie mai mare decît 8 (vezi raționamentul III de mai sus) și în concluzie nu poate fi decît 9. Rezultă $c_1 =9$, iar valoarea minimă a împărțitorului este 112, pentru ca înmulțit cu 9 să ne dea un număr de ordinul miilor ($112 \times 9 = 1008$).

V — Recapitulînd raționamentele III și IV rezultă că valoarea împărțitorului este cuprinsă între 112 și 124 ($112 \leqslant i_3i_2i_1 \leqslant 124$).

Din înmulțirea lui c_5 cu împărțitorul a rezultat un număr de ordinul sutelor ($a_7a_6a_5$), care, scăzut dintr-un număr de ordinul miilor ($d_8d_7d_6d_5$), a dat un număr de ordinul doi (b_6b_5), a cărui valoare maximă poate fi 12. Ținînd seama și de limitele între care poate varia împărțitorul ($112 \div 124$), rezultă că c_5 trebuie să fie mai mare decît 7, căci $7 \times 124 = 868$, care scăzut dintr-un număr de ordinul miilor ($d_8d_7d_6d_5 \geqslant 1000$) ne dă o diferență de cel puțin $132 > 12$, stabilită anterior ca valoarea maximă a lui b_6b_5. În plus c_5 nu poate fi egal nici cu 9, deoarece înmulțirea lui cu valoarea minimă a împărțitorului (112) ne dă un număr de ordinul miilor, deci mai mare decît $a_7a_6a_5$. Rezultă $c_5 = 8$.

Tot pe considerentul că diferența b_6b_5 dintre $d_8d_7d_6d_5$ și $a_7a_6a_5$ poate fi cel mult 12, rezultă că $d_8 = 1$ și $d_7 = 0$ (observați ușor că în situația în care am admite de exemplu $d_7 = 1$ am avea $1100 - 999 = 101$, adică un număr de ordinul sutelor, diferit de b_6b_5 dat prin text).

VI — Exact din aceleași considerente (priviți operațiile de la împărțire, extrase mai jos), rezultă că $b_6 = 1$ și $b_5 = 0$. Rețineți

și concluzia de la punctele II și V că $f_4f_3d_2 < i_3i_2i_1 \leqslant 124$; deci $f_4f_3 < i_3i_2 \leqq 12$.

$$\begin{array}{r} b_6b_5d_4d_3 \\ e_5e_4e_3 \\ \hline f_4f_3 \end{array}$$

VII — În această situație, $a_7a_6a_5$ trebuie să fie atît de mare încît scăzut din $d_8d_7d_6d_5$ (la care cunoaștem primele două cifre $1\ 0\ d_6d_5$) să ne dea diferența maximă de 12, deci el trebuie să fie cel puțin 988 (în cazul în care $d_6 = 0$ și $d_5 = 0$).

Cum $C_5 = 8$ (stabilit la pct. V), rezultă că împărțitorul trebuie să fie 124 ($8 \times 124 = 992$). Observați că orice valoare mai mică (de exemplu, 123) ne dă $8 \times 123 = 984$ care, scăzut din 1000 (limita inferioară a lui $d_8d_7d_6d_5$), ne dă o diferență de $16 > 12$. Deci impărțitorul $i_3i_2i_1 = 124$, iar $a_7a_6a_5 = 992$ din înmulțirea 8×124. Din aceeași înmulțire rezultă $e_5e_4e_3 = 992$.

VIII — Și acum lucrurile merg mult mai ușor; să refacem împărțirea înlocuind literele cu cifrele determinate, sau care rezultă din acestea.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0\ d_6d_5d_4d_3d_2d_1 & 1\ 2\ 4 \\ \cline{2-2} 9\ 9\ 2 & 8\ 0\ 8\ 0\ 9 \\ \cline{1-1} 1\ 0\ d_4d_3 & \\ 9\ 9\ 2 & \\ \cline{1-1} f_4f_3d_2d_1 & \\ 1\ 1\ 1\ 6 & \\ \cline{1-1} = = = = & \end{array}$$

De jos în sus rezultă:

$d_1 = 6$; $d_2 = 1$; $f_3 = 1$; $f_4 = 1$; $d_3 = 3$; $d_4 = 0$; $d_5 = 2$; $d_6 = 0$.

Şi descifrarea completă a împărțiirii este:

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 3\ 1\ 6 & 1\ 2\ 4 \\ \cline{2-2} 9\ 9\ 2 & 8\ 0\ 8\ 0\ 9 \\ \cline{1-1} 1\ 0\ 0\ 3 & \\ 9\ 9\ 2 & \\ \cline{1-1} 1\ 1\ 1\ 6 & \\ 1\ 1\ 1\ 6 & \\ \cline{1-1} = = = = & \end{array}$$

63. Reconstituiți înmulțirea !

$$\begin{array}{r} p\ q\ r\ t \\ 4 \\ \hline t\ r\ q\ p \end{array}$$

Observați că înmulțind un anumit număr de patru cifre cu 4, obținem un număr din aceleași patru cifre (același ordin de mărime — al miilor), dar cu cifrele așezate în ordine inversă.

Determinați p, q, r și t !

Răspuns :

Se observă că p poate fi 1 sau 2 (dacă ar fi mai mare — de exemplu 3 — rezultatul înmulțirii cu 4 ar fi de ordinul zecilor de mii, ceea ce contravine temei).

Înmulțirea lui 4 cu t (oricare ar fi valoarea lui), ne dă întotdeauna un număr cu soț, deci p (rezultatul înmulțirii lor) este cu soț. Corelînd cu raționamentul de mai sus, ajungem la concluzia $p = 2$.

Ce valoare poate avea t ? 4 de înmulțit cu t ne dă un număr care trebuie să aibă la unități cifra 2 (respectiv p). Rezultă că t poate fi 3 sau 8. Priviți acum înmulțirea lui 4 cu p (care am stabilit că este egal cu 2), și veți ajunge la concluzia că $t = 8$. Dacă presupunem $t = 3$, atunci înseamnă că de la înmulțirea anterioară $4 \cdot q$ ar trebui să reportăm 5, pentru ca adunat cu $4 \times 2 = 8$ să ne dea un număr cu cifra 3 la unități (13) și atunci în fața lui t de la produs ar fi trebuit să apară și 1, deci produsul ar fi un număr de ordinul zecilor de mii, ceea ce contravine temei date.

In plus, q poate avea valoarea maximă 9, care înmulțit cu 4 ne-ar fi dat cel mult 36 — adică am fi reportat cel mult 3, sau 4 (cu un report anterior). Rezultă : $t = 8$.

Deoarece de la înmulțirea $4 \cdot q$ nu am reportat nimic, rezultă q egal cu 1 sau 2.

Mai departe, analiza o putem face în variante, ca de exemplu :

Varianta I

Înmulțirea arată acum astfel :

$$\begin{array}{r} 2qr8 \\ 4 \\ \hline 8rq2 \end{array}$$

O punem sub forma de mai jos și operăm :

$(2000 + 100\ q + 10\ r + 8)\ 4 = 8000 + 100\ r + 10\ q + 2$

$8000 + 400\ q + 40\ r + 32 = 8002 + 100\ r + 10\ q$

$390\ q + 30 = 60\ r$

$$q = \frac{2r - 1}{13}$$

Analizați această egalitate, ținînd seama de condițiile stabilite mai sus :

— q este egal cu 1 sau 2 ;

— q și r sînt numere întregi formate dintr-o singură cifră.

Rezultă că numărătorul $(2r - 1)$ poate fi egal cu 13 sau 26.

În acest fel veți deduce că singura valoare care satisface aceste condiții este $r = 7$, rezultînd imediat $q = 1$.

Înmulțirea este, deci :

$$2\,178 \times 4 \equiv 8712$$

Varianta II

De la primul produs $4 \times 8 = 32$ reportăm 3 care, adunat la produsul următor $4r$ (totdeauna cu soț) ne dă un număr fără soț, deci $q = 1$ (stabilisem mai sus q egal cu 1 sau 2).

Luați în considerare produsul $4r$ și reportul 3 de la $4 \times 8 = 32$, deci $4r + 3$ și analizați ce valoare trebuie să aibă r, pentru ca rezultatul final să ne dea un număr cu cifra 1 la unități $(q = 1)$.

Veți deduce că r poate fi egal cu 2 sau cu 7.

Deoarece cifra 2 am atribuit-o literei p și în plus nu satisface produsul următor $4q + 1 = 4 \times 1 + 1 = 5 \neq 2$ (am considerat $r = 2$), rezultă $r = 7$.

Această valoare a lui r satisface produsul $4q + 3 = 4 \times 1 + 3 = 7$, regăsind astfel și la rezultat $r \equiv 7$.

64. Matematica pentru vacanță

Pentru o „vacanță mică“, elevii unei clase au avut de rezolvat 50 de probleme și au fost notați astfel : pentru o problemă corect rezolvată au primit 0,20 puncte, iar pentru o problemă nerezolvată sau greșit rezolvată, li s-au scăzut 0,15 puncte (în sistemul de notare de la 1 la 10). După corectarea caietelor, un elev este notat cu 6,50.

Cîte probleme a rezolvat corect ?

Răspuns 1 :

Dacă le-ar fi rezolvat pe toate corect, ar fi primit nota maximă $50 \times 0{,}20 = 10$.

Să facem această ipoteză, adică să considerăm că le-a rezolvat bine pe toate și că i-am dat nota 10, deci a primit 3,50 puncte în plus față de cît merita.

Observați că aceste 3,50 puncte provin din faptul că pentru fiecare problemă nerezolvată am acordat — pe de o parte — punctajul de 0,20 (ca și cînd problemele ar fi fost rezolvate corect) — iar pe de altă parte — nu am scăzut cele 0,15 puncte, conform sistemului de notare stabilit. Deci pentru fiecare problemă greșit rezolvată sau nerezolvată, noi am acordat, în mod nejustificat, $0{,}20 + 0{,}15 = 0{,}35$ puncte. Adică elevul nu a rezolvat $3{,}50 : 0{,}35 = 10$ probleme. Rezultă că a rezolvat corect 40 probleme.

Verificăm :

$40 \times 0{,}20 = 8$

$10 \times 0{,}15 = 1{,}50$

$8 - 1{,}50 = 6{,}50$ nota primită de elevul nostru.

Cam mică această notă, dar și sistemul de notare a fost mai sever decît cel obișnuit !

Observați că în situația în care, punctele acordate la notare ar fi fost direct proporționale cu numărul problemelor rezolvate, el ar fi primit nota $\frac{40}{50} \cdot 10 = 8$.

Și acum, o întrebare suplimentară : care este numărul minim de probleme necesar a fi rezolvate corect, pentru ca un elev să nu primească o notă negativă ? (v-ați dat seama că este posibil și acest lucru !).

Răspuns 2 :

$$0{,}20\, n \geqslant 0{,}15\,(50 - n)$$

$$n \geqslant \frac{7{,}50}{0{,}35}$$

$$n \geqslant 21{,}4$$

Deci dacă ar fi rezolvat 22 probleme, ar fi primit o notă pozitivă, dar de loc dorită $(22 \times 0{,}20 - 28 \times 0{,}15 = 4{,}40 - 4{,}20 = + 0{,}20)$.

Dacă ar fi rezolvat numai 21 probleme (sau mai puține), nota lui ar fi fost negativă !

(21 × 0,20 — 29 × 0,15 = 4,20 — 4,35 = — 0,15).

Și încă o întrebare ! În condițiile de la problema inițială, să considerăm că numărul problemelor necesar a fi rezolvate era de 56. Cîte probleme trebuia să rezolve corect un elev, pentru a primi nota zero ?

Încercați un mod de rezolvare diferit de cele date mai sus !

Răspuns 3 :

Cel mai mic multiplu comun al punctajelor 0,20 și 0,15 este 0,60. Deci pentru trei probleme bine rezolvate elevul primește 3 × 0,20 = = 0,60 puncte, iar pentru patru probleme nerezolvate sau incorect rezolvate i se scad tot 0,60 puncte (4 × 0,15 = 0,60). În acest raport 3/4 (trei bine rezolvate și patru nerezolvate), punctajul general rămîne zero, numărul total al problemelor (rezolvate sau nu) fiind șapte. Adică pentru un grup de șapte probleme, în raportul 3/4 menționat mai sus, nota generală rămîne zero. Deoarece elevul trebuie să rezolve 56 probleme, vom amplifica raportul 3/4 cu cîtul. 56 : 7 = 8 (valoarea lui nu se schimbă)

Vom avea :

$$\frac{8 \times 3}{8 \times 4} = \frac{24}{32}$$

Rezultă că elevul trebuie să rezolve 24 probleme și să «lase» de o parte restul de 32 probleme, pentru a primi nota zero.
Numărul total al problemelor este cel din text (24 + 32 = 56).

Verificare :

24 × 0,20 = 4,80 (puncte pozitive).
32 × 0,15 = 4,80 (puncte negative).
Diferența lor este evident zero (4,80 — 4,80 = 0).

65. Terenul de fotbal și „raportul de aur"

Conform regulamentului de specialitate, dimensiunile unui teren de fotbal pot varia astfel : lungimea L între 90 și 120 m, lățimea B între 45 și 75 metri, crescînd fiecare din 5 în 5 metri, de la limitele inferioare la cele superioare.

Pentru construirea unui stadion s-au purtat discuții aprinse și au fost consultați o serie de jucători celebri mai vîrstnici, sau mai tineri, asupra dimensiunilor în plan cele mai convenabile ale terenului de fotbal și în special asupra unui raport „optim" între cele două dimensiuni ale terenului (lungimea și lățimea lui).

De la început, consilierii s-au împărțit în două tabere, cu opinii diametral opuse :

a) Cei din prima serie pledau pentru un dreptunghi cu o formă cît mai apropiată de un pătrat, în care raportul dintre lungimea *L* și lățimea *B* să tindă cît mai mult către 1 (unu), adică pledau pentru un teren cu o lățime relativ mare, în ideea de a desfășura jocul pe aripi (de exemplu $L = 100$ m, $B = 75$ m și raportul lor $\frac{L}{B} = 1{,}33$; sau $L = 90$ m, $B = 75$ m, și raportul $\frac{L}{B} = 1{,}20$) ;

b) Cei din seria a doua — cei tineri — preferau jocul în adîncime, direct pe poartă și susțineau că forma ideală a stadionului este un dreptunghi mai „lunguieț", mai „alungit", cu raportul dintre laturi egal sau mai mare de 2 (doi) (de exemplu $L = 90$ metri, $B = 45$ metri și raportul $\frac{L}{B} = \frac{90}{45} = 2$, sau chiar încercau să încalce prevederile regulamentului și sugerau dimensiunile $L = 120$ metri, $B = 45$ metri și raportul $\frac{L}{B} = \frac{120}{45} = 2{,}66$). Fără a spune direct, ei aveau în vedere faptul că un asemenea teren punea mai bine în valoare calitățile lor fizice.

Dacă ați fi arhitectul sau inginerul constructor al acestui stadion, cum v-ați gîndi să rezolvați această problemă, pentru a realiza un dreptunghi cu o formă cît mai plăcută, echilibrată, mai nesupărătoare pentru un ochi de estet ?

Răspuns :

V-ați aduce desigur aminte (așa cum vă sugerez și prin denumirea problemei) de grecii din Antichitate, care considerau că forma ideală a unui dreptunghi o găsim atunci cînd raportul dintre dimensiunile sale este $\frac{L}{B} = \varphi = 1{,}61\ 803\ 398\ 875$. Un astfel de raport se numește și azi „raport de aur", iar dreptunghiul respectiv este fără îndoială un „dreptunghi de aur".

Pentru comoditatea calculelor veți rotunji valoarea acestui raport, considerînd $\varphi = 1{,}62$, iar raportul $\frac{L}{B} = 1{,}62$ — cu toată aproximația făcută — va rămîne în continuare un „raport de aur", sau o „proporție divină", deși ultima denumire ascunde în ea o inexactitate (știți că proporția este egalitate a două rapoarte).

În consecință veți cere beneficiarilor să-și aleagă fie lungimea L, fie lățimea B a stadionului și le veți putea proiecta și construi un stadion... „de aur", ținînd seama de formulele care derivă din aceea de mai sus :

$L = 1{,}62\ B$; sau $B = \frac{L}{1{,}62}$

Note :

1. Dacă vi s-a dat lungimea L=100 m și dacă ați reținut că inversul raportului de aur $\frac{1}{\varphi} = 0{,}618033...$ (φ fiind singurul număr pozitiv egal cu inversul său plus 1), atunci lățimea rezultă imediat :

$$\frac{B}{L} = \frac{1}{\varphi}\ ;\ B = \frac{1}{\varphi} L = 0{,}62 \times 100 = 62\ \text{m}$$

Veți adopta, fără îndoială, lățimea B=60 m, pentru a respecta prevederea regulamentară ca dimensiunea să fie dizivibilă cu 5 și pentru faptul că este dimensiunea cea mai apropiată de 62 m.

2. Un stadion care ar avea dimensiunile (strict conform regulamentului) de L=120 m, B=75 m — deci dimensiunile maxime — ar avea un raport al laturilor de 1,60 m, foarte apropiat de cel de „aur".

Nu știm dacă există un asemenea stadion !

Aceeași situație pentru dimensiunile 115 m și 70 m (raportul este 1,64).

3. Există și un „triunghi de aur" și anume triunghiul isoscel cu un unghi egal cu 36°, iar celelalte două de cîte 72°, în care raportul dintre o latură mare și latura mică este tot un raport de aur ($\varphi = 1{,}618...$).

66. O familie la masă [+]

O familie compusă din cei doi părinți și cinci copii se așază la masă, într-o ordine anumită. Cel mai mic, nemulțumit de locul pe care îl ocupă, iscă o discuție furtunoasă pe această temă, cu surorile și frații mai mari. El vrea să stea în capul mesei, să aibă în stînga pe fratele mijlociu, în dreapta pe surioara cea mai mică, care la rîndul ei nu e de acord cu acest aranjament, deoarece atît ea cît și ceilalți doresc cu totul altceva etc., etc.

Tatăl — în calitate de cap de familie — pune capăt controverselor hotărînd : „de acum înainte, la fiecare masă (prînz și seara), ne vom așeza astfel încît să existe cel puțin o schimbare de locuri, față de modul de așezare de la mesele precedente". În același scop, el cere celui mai mare dintre băieți, să-i prezinte în fiecare seară schemele cu locurile pe care le va ocupa fiecare membru al familiei, la cele două mese de a doua zi (micul dejun se servește „în rate").

Cîte asemenea schimbări se pot face, pentru a nu avea două situații identice ? După cît timp se revine la așezarea inițială ? Mai înainte de a trece la răspuns vă reamintesc că numărul permutărilor unei mulțimi de n elemente se notează cu Pn și este egal cu n ! (sper că ați citit „n factorial"), care este egal cu produsul tuturor numerelor naturale consecutive de la n pînă la 1. Deci $P_n = n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1.$

Răspuns :

Prin text nu se cere altceva decît aflarea numărului permutărilor ce se pot face cu această mulțime compusă din șapte persoane. Ce este o permutare ?

Este o schimbare sau o modificare pe care o facem în modul de aranjare a unei mulțimi ordonate, păstrînd de fiecare dată numărul total al elementelor mulțimii. Modificarea poate afecta fie două elemente care își schimbă reciproc pozițiile, fie mai multe sau toate elementele mulțimii. De exemplu, dacă avem o mulțime de doi elevi, să zicem elevul A și elevul B — M {A, B} — numărul permutărilor acestei mulțimi va fi $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$, căci nu pot interveni decît două situații în modul de ordonare a acestor elevi și anume : A, B și B, A. Luați trei elevi A, B și C, efectuați permutările și veți obține $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (A, B, C ; A, C, B ; B, A, C ; B, C, A ; C, A, B și C, B, A).

Pentru cei mai studioși dintre Dv., care ați răsfoit manualele școlare din ultimii ani, vă redăm definiții mai „pretențioase" :

— Permutarea unei mulțimi finite A este o funcție bijectivă definită pe A și cu valori tot în A.

— Avînd o mulțime A cu n elemente, fiecare din mulțimile ordonate care se pot forma cu cele n elemente ale mulțimii A se numește o permutare a acestei mulțimi.

Și acum să revenim la problema noastră! Avînd șapte membri în familie, deci o mulțime finită cu șapte elemente, numărul permutărilor acestei mulțimi va fi $P_7=7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$. Deci copilul cel mai mare va trebui să prezinte tatălui său 5040 poziții distincte de așezare la masă. Pentru a reveni la așezarea inițială, familia va trebui să ia masa împreună de 5040 ori, respectiv 2520 zile, adică aproape 7 ani. Dacă tatăl nu pleacă prea des în delegație, iar copiii pe la școli prin alte localități, vor avea tot timpul să facă astfel de experiențe.

67. Trei motocicliști

Trei frați pleacă simultan, cu motocicletele, într-un concurs „în familie". Fratele mijlociu parcurge distanța D în timpul T, cel mai vîrstnic parcurge aceeași distanță mergînd cu 50 km pe oră într-un timp mai mic cu două ore, iar cel mai mic — care are o viteză de 30 km pe oră — are nevoie de două ore în plus față de timpul necesar fratelui mijlociu.

Aflați viteza acestuia din urmă, care — precizăm de pe acum — nu este egală cu media vitezelor celorlalți, adică nu este $\frac{50+30}{2}=$ $=40$ km/h.

Rezolvare 1 :

(*Calea aritmetică*). Să denumim pe cei trei frați — pentru ușurința exprimării — F1, F2, F3 (în ordine, de la cel mai mare la cel mai mic), iar timpii în ore vor fi T—2, T și T+2. Și acum să le dăm drumul în cursă!

Cînd F1 ajunge la destinație, F3 mai are nevoie de încă 4 ore pentru a face aceeași ispravă și, cum viteza lui este de 30 km/h, înseamnă că el mai are de parcurs încă 4 h×30 km/h=120 km, pînă la aceeași destinație. Această diferență de distanță între F1 și F3 se explică prin faptul că, fratele cel mai mare F1 cîștigă

față de cel mic (îl depășește, îl întrece), în fiecare oră, cîte 20 km (diferența între vitezele lor : 50 km/h și 30 km/h).

Pentru a afla timpul lui F1, vom împărți avansul total de 120 km, cînd acesta a ajuns la destinație, la avansul orar de 20 km față de F3 și vom găsi :

$$\frac{120 \text{ km}}{20 \text{ km/h}} = 6 \text{ h}$$

Deci : T—2=6 h ; T=8 h ; T+2=10 h.

Distanța D o aflăm făcind produsul între viteză și timp.

Pentru F1, distanța D=50 km/h×6 h=300 km.

Pentru F3, distanța D=30 km/h×10 h=300 km.

(Evident, aceeași distanță !)

Viteza cu care parcurge F2 această distanță este

300 km : 8 h=37,5 km/h ≠ 40 km/h.

Încercați o rezolvare similară, considerînd că F3 a ajuns la destinație, iar F1 a continuat cursa, parcurgînd în plus 50 km/h× ×4 h=200 km. Referiți-vă la avansul orar de 20 km și veți găsi T+2=10 ore.

Observație :

Dacă vom considera că un singur motociclist parcurge distanța D cu o viteză de 50 km/h și apoi aceeași distanță (eventual drumul de întoarcere) cu viteza de 30 km/h, viteza medie va fi egală cu viteza lui F2 din problema noastră, adică Vm=37,5 km/h.

Vedeți problema „Viteza medie“.

Rezolvare 2 :

(*Calea algebrică*). Distanța D, parcursă atît de F1 cît și de F3, fiind aceeași, egalăm produsul dintre viteza și timpul lui F1, cu cel dintre viteză și timpul lui F3 și avem :

$$50(T-2)=30(T+2)$$

Mai departe, continuați singuri !

Va rezulta T=8 h, ca mai sus.

68. Media numerelor probelor de beton [—]

La o stație de betoane, se prelevează pentru verificări o probă la 200 m³ beton de o anumită marcă și o probă la 100 m³ beton de altă marcă.

Considerînd că se produc cantități egale din cele două feluri de betoane, să se arate care este media numerelor probelor prelevate pe ansamblu (la cîți metri cubi de beton se prelevează o probă).

Răspuns :

Aparent : 1 probă la 150 m^3 beton fabricat $\left(\frac{100+200}{2}\right)$

Real : 1 probă la 100 m^3 beton din categoria doua înseamnă 2 probe la 200 m^3 beton. Adunăm acestea cu 1 probă la 200 m^3 beton din prima categorie și găsim 3 probe la 400 m^3 beton, adică 1 probă la 133,33 m^3 beton.

69. Ograda cu iepuri și găini [—]

Într-o ogradă avem 26 iepuri și găini la un loc. Dacă numărăm picioarele găsim 80. Să se spună cîți iepuri și cîte găini avem, fără a se face apel la rezolvarea algebrică !

Răspuns :

a) Ridicăm iepurașii în două picioare (evident, este o supoziție !). Cîte picioare mai stau pe pămînt ? Dacă sînt 26 de capete (iepuri și găini) și acum au fiecare cîte 2 picioare pe pămînt, vom avea $26\times2=52$ picioare pe pămînt.

Cîte sînt în aer ?

80 (cîte sînt în total)$-52=28$ picioare în aer (evident ale iepurașilor !).

Cum fiecare iepuraș stă cu cîte 2 lăbuțe în aer, înseamnă că avem $28:2=14$ iepurași.

Numărul găinilor este $26-14=12$.

b) Problema se poate rezolva — tot pe baza unei ipoteze — dar nu sub forma plauzibilă de mai sus, ci considerînd — deși absurd — că și găinile au 4 picioare. Ar rezulta în acest caz că numărul total al picioarelor ar fi $4\times26=104$, față de cel real 80 ; înseamnă că am presupus că avem în plus $104-80=24$ picioare. Deoarece acestea au provenit din considerația că fiecare găină are 2 picioare în plus, rezultă că numărul găinilor este $24:2=12$, iar al iepurilor $26-12=14$, regăsind astfel soluția corectă.

c) Apelînd la cunoştinţele de algebră, rezolvăm astfel :

x=numărul iepurilor

y=numărul găinilor

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} x+y=26 \\ 4x+2y=80 \end{cases} \Big| -2$$

$$(1)+(2) \quad 2x=28 \Rightarrow \begin{cases} x=14 \text{ iepuri} \\ y=12 \text{ găini} \end{cases}$$

Notă : problema poate fi redactată în variante de către fiecare dintre dvs., schimbînd datele, după voie.

70. Mihai are probleme

Mihai găseşte 161 lei în monezi de 3 lei şi de 5 lei. El numără monezile şi găseşte că sînt în total 39. Predă banii la prima instituţie competentă, se duce acasă, povesteşte isprava, dar deşi este un copil foarte dotat, el nu are decît cîţiva ani şi în consecinţă nu ştie să răspundă la întrebarea : cîte monezi de 3 lei şi cîte de 5 lei erau ? Îl puteţi ajuta dvs. ? Dar ca şi la problema precedentă, lăsaţi algebra mai la urmă !

Răspuns :

a) Considerăm că şi monezile de 5 lei au valoarea celor de 3 lei. Ce sumă am avea în această ipoteză ?

Suma nouă (ipotetică) va fi :

39×3=117 lei. Cîţi lei am pierdut prin această devalorizare ?

161—117=44 lei.

Deoarece aceşti 44 lei provin din pierderea a cîte 2 lei de la fiecare monedă de 5 lei, rezultă că numărul acestor monezi este 44 : 2=22 buc., iar al monezilor de 3 lei este 39—22=17 buc.

b) Putem face o consideraţie mai optimistă : presupunem că monezile de 3 lei au valoarea de 5 lei ! Noua valoare totală ar fi 39 buc.×5 lei=195 lei.

Ce valoare am adăugat artificial ?

195—161=34 lei.

Această valoare în plus provine de la numărul monezilor de 3 lei, cărora le-am adăugat 2 lei. Deci numărul monezilor de 3 lei este 34 : 2=17. Diferenţa de 39—17=22 ne dă numărul monezilor de 5 lei.

c) Algebric x=număr monezi de 3 lei
y=număr monezi de 5 lei.

$$\begin{cases} (1)\quad x+y=39 & \Big|\ -3 \\ (2)\quad 3x+5y=161 & \end{cases}$$

$(1)+(2)\quad 2y=44$ Rezultă $y=22$; $x=17$

71. Elevii în bănci

O clasă obișnuită, cu un număr de elevi și altul de bănci !

Dacă așezăm cîte 2 elevi în bancă, rămîn 7 elevi fără loc. Dacă așezăm cîte 3 elevi în bancă, rămîn 2 bănci neocupate.

Calculați numărul elevilor și al băncilor din acea clasă !

După rezolvarea pe baza raționamentelor aritmetice, apelați și la cunoștințele de algebră !

Răspuns :

R1) În ipoteza cîte 3 elevi în bancă, rămîn 2 bănci neocupate, deci mai pot lua loc încă $2\times3=6$ elevi. Împrumutăm acești 6 elevi de la o clasă vecină și am ocupat astfel toate băncile cu cîte 3 elevi. Acum, acești elevi, îi așezăm cîte 2 în bancă și — evident — vor rămîne în picioare cei 7 rămași fără loc din prima ipoteză, plus cei 6 elevi împrumutați, deci în total $7+6=13$ elevi. Să comparăm cele două situații, cu numărul elevilor mărit cu 6 :

— așezați cîte 3 în bancă, elevii ocupă toate locurile.

— așezați cîte 2 în bancă, rămîn 13 elevi în picioare, cîte unul în dreptul fiecărei bănci. (Putem considera că repartizăm tot cîte 3 elevi la o bancă, din care 2 stau jos și unul alături, în picioare !).

Deci cei 13 elevi care stau în picioare, fiecare lîngă o bancă, reprezintă exact numărul băncilor !

Numărul elevilor clasei — fără cei împrumutați — îl calculăm dintr-una din ipotezele date în text.

Cîte 2 elevi în bancă plus 7 în picioare înseamnă :

N elevi$=2\times13+7=26+7=33$;

Cîte 3 elevi în bancă și 2 bănci neocupate înseamnă :

N elevi$=3\times13-6$ (locuri neocupate)$=39-6=33$ elevi

Sau N elevi$=3\times11=33$ elevi.

R2) Notăm : x=nr. elevilor ; y=nr. băncilor.

Ecuațiile sînt : (1) $\begin{cases} 2y=x-7 \\ 3y=x+6 \end{cases}$ (2)

(2)—(1) $\Rightarrow \begin{cases} y=13 \text{ bănci} \\ x=33 \text{ elevi} \end{cases}$

72. Vrăbiile și parii (I)

Dacă stă cîte o vrabie pe un par, o vrabie nu are pe ce sta. Dacă stau cîte două vrăbii pe un par, rămîne un par liber. Cîte vrăbii și cîți pari sînt ?

Răspuns :

a) Considerăm că avem două vrăbii în plus, astfel că atunci cînd stau cîte două pe un par, să nu rămînă nici un par liber.

b) Vrăbiile, numărul inițial plus cele două, le așezăm acum cîte una pe un par și vor rămîne «în aer» trei vrăbii (una conform situației inițiale din text, plus cele două luate de noi).

Comparăm variantele de mai sus a și b : în varianta a stau cîte 2 vrăbii pe un par, sînt toți parii ocupați și toate vrăbiile își au locul lor ; în varianta b luăm cîte o vrabie de pe fiecare par și o «obligăm» să zboare în jurul parului, rămînînd cîte o vrabie pe un par și cîte una în jurul parului. Cum am văzut că trei vrăbii rămîn în aer, fără par, rezultă că sînt trei pari. Numărul vrăbiilor este 3+1=4 (conform textului).

Pentru rezolvarea algebrică sistemul de ecuații este :

$$\begin{cases} v=p+1 & (1) \\ \frac{v}{2}=p-1 & (2) \end{cases} \qquad \text{Rezultă} \begin{cases} v=4 \text{ vrăbii} \\ p=3 \text{ pari} \end{cases}$$

Observație : dacă adunăm ecuațiile (1)+(2) obținem $v+\frac{v}{2}=2p$;

$\frac{3v}{2}=2p$; $3v = 4p$; $\frac{v}{p}=\frac{4}{3}$ (vezi aceeași problemă notată cu II)

73. Vrăbiile și parii (II)

În finalul problemei anterioare, am ajuns la relația :

$\frac{v}{p}=\frac{4}{3}$ unde v=număr vrăbii

p=număr pari

Conform textului (I), soluția valabilă era v=4 și p=3, dar din relația de mai sus rezultă că se pot compune o infinitate de probleme de acest gen, în care trebuie să respectăm doar raportul 4/3. Ori valoarea unui raport rămîne aceeași, atunci cînd îl amplificăm (înmulțim și numărătorul și numitorul cu același număr). Faceți și dvs. acest lucru! Pentru exemplificare, vom amplifica raportul cu 3, deci $\frac{v}{p}=\frac{4\cdot 3}{3\cdot 3}=\frac{12}{9}$ în care considerăm v=12 și p=9. Și acum problema va fi:

Dacă stă cîte o vrabie pe un par, rămîn 3 vrăbii în aer!

Dacă stau cîte două pe un par, rămîn 3 pari liberi. Cîte vrăbii și cîți pari sînt?

Deși știți rezultatul — el a fost necesar pentru a redacta textul problemei — încercați să o rezolvați conform modelului de la problema I.

Compuneți și dvs. o problemă similară!

74. Problema comandantului de companie

Un ofițer are sub comanda sa 150 soldați. Într-o dimineață el adună compania, nu face apelul ca să-și dea seama dacă sînt toți soldații sau nu, dar remarcă destul de ușor că lipsesc cîțiva.

Prin instrucția pe care o face, el îi poate aranja cîte 2, cîte 4, cîte 5 și cîte 7, în rînduri complete, fără a rămîne nici un soldat în afara rîndurilor (de 2 ; 4 ; 5 și 7).

După program, ofițerul este întrebat de superiorul său cîți soldați au lipsit de la instrucție. El face un mic calcul și răspunde corect. Puteți să refaceți și dvs. acest calcul?

Răspuns:

Dacă soldații prezenți au fost aranjați în rînduri complete de 2 ; 4 ; 5 și 7, înseamnă că numărul lor este un multiplu al acestor numere. Căutăm cel mai mic multiplu comun, care este $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140 < 150$. Deci erau prezenți 140 soldați și 10 absenți.

Obs.: Nu putem lua în considerare un multiplu mai mare (2×140 ; 3×140), deoarece problema a limitat numărul total al soldaților la 150. Dacă prin text se arăta că efectivul total al soldaților era mai mare, să fixăm de exemplu 435, atunci am fi considerat un multiplu al lui 140, imediat inferior lui 435, acesta era $3\times140=420$, deci numărul absenților ar fi fost 435—420=15.

În această ultimă variantă nu am luat în considerare posibilitatea ca numărul celor prezenţi să fi fost egal cu cel mai mic multiplu comun (140), sau cu cel imediat următor ($2 \times 140 = 280$), deoarece textul arată că numărul absenţilor era destul de mic („cîţiva“).

75. Lotul naţional de fotbal.

Antrenorul federal convoacă un lot de jucători pentru echipa naţională de fotbal, de la divizionarele A: Steaua, Dinamo, Universitatea Craiova şi Corvinul Hunedoara.

La primul antrenament, pentru a satisface curiozitatea celor care îndrăgesc acest sport, ziariştii se interesează de numărul total al jucătorilor selecţionaţi şi de numărul pe care l-au dat lotului fiecare din cele patru echipe.

Un jucător de la Steaua, se oferă să le dea lămuririle necesare: „Să ştiţi că, de fapt, toţi selecţionaţii sîntem de la Steaua, cu excepţia a numai... 18 jucători“.

Un dinamovist, sesizînd intenţia colegului său, completează: „Adevărul-adevărat este că toţi sîntem de la Dinamo, mai puţin 18 jucători“.

Nedumerirea generală este amplificată de replica tăioasă a unui oltean care produce panică în echipa ziariştilor: „Dacă vreţi să ştiţi adevărul gol-goluţ, atunci daţi-mi voie să vă spun că toţi selecţionaţii sîntem de la Universitatea Craiova, afară doar de 18 jucători, aduşi de prin alte părţi.“

Hunedorenii nu se lasă mai prejos şi desăvîrşesc perplexitatea ziariştilor: „Poate că au dreptate cei care au vorbit pînă acum, dar toţi pe care ne vedeţi aici sîntem de la Corvinul; e drept că au mai fost aduşi 18 jucători şi de la alte echipe“.

Ziariştii fac scheme, calcule, supoziţii, dar nu ajung la nici un rezultat.

Într-un tîrziu, unul dintre ei se duce la telefonul stadionului şi, după o convorbire cu fiul său (elev în clasa VI), risipeşte nedumerirea slujitorilor condeiului, dîndu-le soluţia problemei.

A doua zi, toate ziarele comunicau: „Lotul naţional este alcătuit din... jucători, din care... provin de la Steaua... de la Dinamo... de la Universitatea Craiova şi... de la Corvinul Hunedoara“.

Considerînd că toţi cei patru jucători au avut dreptate, deci că cele patru propoziţii (afirmaţii) sînt corecte, Dv. vă revine sarcina să completaţi spaţiile libere de mai sus cu numărul jucătorilor şi

să reproduceți raționamentele fiului ziaristului, pe baza cărora au rezultat aceste numere.

Rețineți însă că elevul din clasa VI nu știa algebră și în concluzie nici dv. nu vă este permis să apelați la metodele ei !

Răspuns 1 :

Începem să raționăm, recapitulînd pe scurt datele problemei și primele concluzii ce se desprind din text :

— jucătorii lotului proveneau de la patru echipe ;

— orice combinație de trei echipe dădeau lotului 18 jucători ;

— sînt posibile numai patru combinații sau variante de acest fel, corespunzînd celor patru declarații ; de altfel $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$

Pentru reprezentarea intuitivă vom face și o schemă, cu cele patru variante, în care vom nota echipele cu inițialele lor și vom tăia inițiala echipei, ai cărei jucători nu fac parte din cei 18.

~~S~~ D U C => 18 jucători (grupă sau lot incomplet)
S ~~D~~ U C => 18 jucători (grupă sau lot incomplet)
S D ~~U~~ C => 18 jucători (grupă sau lot incomplet)
S D U ~~C~~ => 18 jucători (grupă sau lot incomplet)

Să facem ipoteza că pe stadion se află toți jucătorii celor patru echipe și că putem lua de la fiecare echipă atîția jucători cîți vom avea nevoie pentru a forma cele patru grupe de cîte 18 jucători (un fel de loturi incomplete), ca în schema de mai sus. Rezultă că vom avea nevoie în total de $4 \times 18 = 72$ jucători, repartizați în grupe de cîte 18 jucători, fiecare grupă fiind alcătuită din jucători de la trei echipe.

Deoarece fiecare echipă lipsește dintr-o combinație și deci participă la numai trei dintre ele, rezultă că cei 72 de jucători i-am adunat luînd de la fiecare echipă de trei ori mai mult numărul de jucători selecționați, adică am convocat — în ipoteza noastră — trei loturi complete. Observați că și în schema de mai sus apar 3S, 3D, 3U, 3C, deci de trei ori numărul jucătorilor pe care — în realitate — fiecare echipă i-a trimis la lot.

De la ipoteză să trecem la realitate ! Antrenorul federal nu a făcut trei convocări, căci nu avea nevoie de trei loturi, ci numai de unul singur. Deci dacă pentru trei loturi complete au rezulat 72 de jucători, concluzionăm ușor că pentru un lot au fost convocați $72 : 3 = 24$ jucători.

Mai departe e foarte simplu : fiecare echipă a furnizat lotului, conform afirmațiilor glumețe, dar corecte, ale celor patru reprezentanți, cîte 24—18=6 jucători.

Soluția algebrică rezultă imediat dacă în schema de mai sus, punem semnul plus între inițialele *netăiate* (pe care le considerăm necunoscute) și egalăm fiecare sumă cu 18.

$$D+U+C=18$$
$$S+U+C=18$$
$$S+D+C=18$$
$$S+D+U=18$$

A rezultat un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute, ușor de rezolvat, prin metoda reducerii sau substituției. Noi vă propunem să adunați cele patru ecuații ! Veți obține :

$$3S+3D+3U+3C=72$$
$$3(S+D+U+C)=72$$
$$S+D+U=18$$

Conform declarațiilor celor patru purtători de cuvînt, fiecare echipă a dat lotului :

24—18=6 jucători

76. Economiile unor elevi

O jumătate din suma depusă de un elev la CEC este egală cu o treime din suma depusă de cel de-al doilea elev și cu o cincime din aceea depusă de cel de-al treilea elev.

Știind că valoarea totală a sumelor depuse de cei trei elevi este egală cu 2000 lei, să se afle cît a depus fiecare elev.

Apelați la rezolvarea prin metodele algebrei, numai pentru a vă verifica raționamentele !

Răspuns :

1) Prima concluzie rezultată din text este aceea că avem trei sume diferite depuse la CEC de elevi, prima fiind cea mai mică, iar ultima cea mai mare. Vom considera că fiecare elev are această sumă în fața lui și îi vom obliga să le împartă — conform textului — primul în două părți egale, al doilea în trei părți egale și al treilea în cinci părți egale.

Eventual le punem la dispoziţie două, trei şi respectiv cinci punguţe, în care fiecare să-şi împartă în mod egal suma depusă la CEC.

Dacă aţi reţinut că o jumătate din prima sumă este egală cu o treime din a doua şi cu o cincime din a treia, veţi conchide uşor că toate grămezile sau punguţele conţin aceeaşi sumă (revedeţi textul).

Deoarece în total cei trei elevi au $2+3+5=10$ grămezi (punguţe), cu o valoare totală de 2000 lei, rezultă că valoarea dintr-o grămadă sau punguţă este de $2000:10=200$ lei.

Primul elev avînd două punguţe, înseamnă că are la CEC $2\times200=400$ lei, al doilea elev $3\times200=600$ lei, iar al treilea $5\times200=1000$ lei.

2) Notînd cu x, y, z sumele celor trei elevi, rezolvarea algebrică ne conduce la următoarele ecuaţii :

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5} & (1) \\ x+y+z=2000 & (2) \end{cases}$$

Sistem de ecuaţii care se poate rezolva uşor prin metoda substituţiei [înlocuim în ecuaţia (2) pe y şi pe z în funcţie de x din ecuaţiile (1)]

Noi însă ne vom aduce aminte că într-un şir de rapoarte egale, suma numărătorilor supra suma numitorilor ne dă un raport egal cu fiecare din rapoartele date. Deci :

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{10}=\frac{2\,000}{10}=200$$

De unde :

$x=2\times200=400$ lei
$y=3\times200=600$ lei
$z=5\times200=1000$ lei

77. Barajul

La festivitatea prilejuită de darea în exploatare a unui baraj, şeful de şantier organizează şi un concurs pentru copiii şantierului, cu următoarea problemă :

— dacă lacul e gol și nu lăsăm să curgă nici un debit în aval, atunci rîul umple acumularea în 8 luni ;

— dacă lacul ar fi plin și am devia rîul astfel încît să nu mai alimenteze deloc lacul, atunci consumatorii din aval l-ar goli în 10 luni ;

— imaginați-vă că lacul e gol, rîul îl alimentează cu un debit constant și în același timp se livrează apă și consumatorilor din aval.

Ținînd seama de condițiile arătate mai sus, să se arate în cît timp se umple lacul.

Răspuns :

Vom analiza mai întîi dacă problema e posibilă !

Dacă rîul umple lacul în 8 luni, înseamnă că într-o lună va umple 1/8 din volumul lui (sau V/8).

Consumatorii din aval golesc lacul în 10 luni ; înseamnă că într-o lună golesc 1/10 din volumul lui (sau V/10). Deoarece 1/8 (debitul de umplere) e mai mare decît 1/10 (debitul de golire), deducem că se acumulează apă în lac, deci lacul se va umple (evident într-un timp mai îndelungat decît 8 luni).

Care este acest timp ?

Într-o lună se umple 1/8 din volumul lacului și în același timp se golește 1/10 din acest volum, deci în lac se acumulează (în fiecare lună).

$$(1) \quad \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40} \text{ din volumul lacului.}$$

Pentru ca lacul să se umple, satisfăcînd în același timp consumatorii, ținînd seama că într-o lună se umple 1/40 din volumul lui, va fi nevoie de 40 de luni.

Notă : În fracțiile de mai sus, la numărător am pus 1, considerînd volumul lacului V egal cu unitatea. Rezolvarea era identică și în situația în care consideram V/8 și V/10.

$$(2) \quad \frac{V}{8} - \frac{V}{10} = \frac{5V-4V}{40} = \frac{V}{40}$$

Observați că $\frac{V}{40}$ reprezintă, din punct de vedere dimensional, debitul efectiv de umplere, deoarece la numărător V reprezintă volumul lacului (cantitatea), iar la numitor 40 reprezintă numărul lunilor (timpul), ceea ce de fapt constituie și răspunsul la problemă.

Și încă o rezolvare !

Cel mai mic multiplu comun al numerelor 8 și 10 este 40. Să vedem ce se întîmplă în 40 de luni ?

În primul rînd, lacul s-ar umple de $\frac{40}{8}=5$ ori și în același timp el s-ar goli de $\frac{40}{10}=4$ ori.

Dacă se umple de 5 ori și se golește de 4 ori, înseamnă că se umple o dată ! Este exact ceea ce căutam.

Rezultă că în 40 de luni, rîul poate umple complet lacul, deși conducta de alimentare a consumatorilor din aval funcționează din plin.

78. Problema profesorului de baschet

Pentru ora de educație fizică, o clasă de elevi împreună cu profesorul de specialitate se deplasează pe Stadionul Tineretului și găsesc libere doar terenurile de baschetbal. Concluzia este simplă : toată „lumea" va juca baschet !

Profesorul face un calcul sumar și ordonă : „Treceți cîte zece elevi la un panou și exersați aruncarea la coș" !

Șeful clasei —, care făcuse în prealabil prezența și care numărase panourile de baschet disponibile —, are însă ceva de obiectat : „Sîntem prea mulți zece ! De altfel, observați că rămîn două panouri libere" !

Profesorul reduce la șapte numărul elevilor la un panou de baschet, însă șeful clasei tot mai are ceva de spus : „E mai bine așa, dar să știți că ar mai trebui doi elevi, ca să fim cîte șapte la fiecare panou".

Dumneavoastră — cei care nu ați asistat la acest antrenament — trebuie să calculați numărul elevilor din acea clasă și numărul panourile de baschet (coșurilor), la care au jucat elevii.

Răspuns :

Schițați pe caietul sau hîrtia dumneavoastră, într-un fel sau altul, un număr oarecare de panouri de baschet și scrieți deasupra fiecăruia, numărul 10. În continuare, la dreapta, schițați încă două panouri, fără nici un număr.

Dacă prin numerele 10 menționate mai sus, ați înțeles de fapt numărul elevilor repartizați la un panou, atunci veți deduce ușor

că sînteţi în prima variantă de antrenament, ordonată de profesor. Reţineţi că nu cunoaştem numărul panourilor la care au fost repartizaţi iniţial cîte zece elevi, iar în desenul dvs., aţi schiţat un număr oarecare de panouri, fără ca acest lucru să influenţeze raţionamentul care urmează.

Pentru a ne situa în cea de a doua variantă de antrenament (cîte şapte elevi la un panou), va trebui să trecem de la panourile care au cîte zece elevi, la cele două panouri libere, doisprezece elevi (şapte la un panou, cinci la celălalt; revedeţi în text, ultima observaţie a şefului clasei!). Aceşti doisprezece elevi îi vom obţine luînd cîte trei elevi din cei zece aflaţi la primele panouri, pentru ca la aceste panouri să rămînă cîte şapte elevi. Putem scrie numărul 7 sub fiecare panou, deasupra căruia smrisesem numărul 10. Sub cele două panouri libere, deasupra cărora nu scrisesem nimic, vom scrie 7 şi respectiv 5. Sîntem în varianta doua de antrenament.

Dacă avem nevoie de doisprezece elevi, luînd cîte trei de la un panou, înseamnă că trebuie să „apelăm" la 12 : 3=4 panouri. Am aflat numărul panourilor la care profesorul repartizase iniţial elevii săi. La acestea vom adăuga cele două panouri libere şi vom afla că antrenamentul a avut loc la şase panouri.

Aflarea numărului elevilor nu mai este o problemă pentru nimeni! ($4\times10=40$; sau $5\times7+1\times5=40$).

79. Examen la... o echipă de fotbal

Antrenorii unei echipe de fotbal supun jucătorii lor unui examen compus din 33 probe (lovituri de la 11 metri, de la 16 metri, cornere, pasa lungă, pasa scurtă, preluări, stopuri, driblinguri etc.) şi acordă 0,30 puncte pentru fiecare probă reuşită, dar scad 0,15 puncte pentru o probă nereuşită, sau la care nu a participat jucătorul respectiv. Se observă uşor că antrenorii se menţin aproximativ în sistemul clasic de notare de la 0 la 10, deoarece orice jucător care trece toate probele poate obţine $33\times0{,}30=9{,}90$; nota 10 este rezervată antrenorilor, sau acelor jucători care vor reuşi o serie de exerciţii de excepţie.

Nota de trecere este 7, dar observaţi că sistemul de notare este mai sever decît cel obişnuit întrucît, pentru probele nereuşite, nu numai că nu se acordă vreun punct, dar se scad 0,15 puncte.

Căpitanul echipei este uşor accidentat, dar el insistă să ia parte la examen, fiind convins că va obţine nota de trecere. Antrenorii

acceptă cu greu această cerere, dar o acceptă, în ideea că omului de bază al echipei i se poate acorda o asemenea favoare.

Şi într-adevăr, dacă ceilalţi coechipieri obţin note mari de 9 sau 9,90 căpitanul a obţinut doar 7,20. Cam mică această notă pentru primul jucător al ecipei, dar să nu uităm faptul că el nu era în plenitudinea forţelor sale, precum şi „duritatea" sistemului de notare.

Şi acum, întrebările la care trebuie să răspundeţi dumneavoastră :

1. La cîte probe a reuşit căpitanul echipei să realizeze norma impusă de antrenori ?

2. Cîte probe trebuia să treacă un jucător oarecare, pentru a primi nota zero ? Sperăm că v-aţi dat seama că există şi o asemenea posibilitate !

Răspunsuri :

1. Vom face ipoteza că şi „căpitanul" a trecut cu bine toate probele, adică a obţinut 33×0,30=9,90. Rezultă că i-am acordat peste nota real obţinută şi meritată 9,90—7,20=2,70 puncte.

De unde provin aceste 2,70 puncte ? Vom observa mai întîi că pentru fiecare probă netrecută, noi i-am acordat în mod arbitrar pe de o parte 0,30 puncte (ca pentru o probă reuşită), iar pe de altă parte, pentru aceeaşi probă, nu i-am scăzut 0,15 puncte, conform sistemului de notare stabilit. Deci pentru fiecare probă nereuşită sau la care nu a putut participa, noi i-am acordat, în mod nejustificat 0,30+0,15=0,45 puncte.

Deoarece în total l-am avantajat cu 2,70 puncte, rezultă că „decanul" echipei nu a trecut 2,70 : 0,45=6 probe şi deci a trecut cu succes celelalte 33—6=27 probe.

Verificarea ne arată corectitudinea rezolvării (27×0,30=8,10 ; 6×0,15=0,90 ; 8,10—0,90=7,20).

2. Cel mai mic multiplu comun al punctajelor 0,30 şi 0,15 este 0,30. Deci pentru o probă reuşită, jucătorului i se acordă 0,30 puncte, iar pentru două probe nereuşite (sau la care nu a luat parte) i se scad tot 0,30 puncte (0,15×2=0,30).

În acest raport 1/2 (o probă reuşită şi două probe nereuşite) punctajul general rămîne zero, numărul probelor astfel grupate fiind 3. Adică pentru un grup de trei probe în raport 1/2 menţionat mai sus, nota rămîne zero. Deoarece jucătorul trebuia să ia parte la 33 probe, rezultă că sînt 33 : 3=11 grupe de cîte trei probe, care ne dau punctajul zero (o probă reuşită, două probe

nereușite). Deci jucătorul a trecut cu succes 11×1=11 probe, și nu a trecut, sau nu a participat la 11×2=22 probe. Nota zero rezultă acum destul de ușor și constituie verificarea calculelor la cea de a doua întrebare : (11×0,30=3,30 ; 22×0,15=3,30 ; 3,30—3,30=0).

80. Bazinul olimpic de înot.

Un bazin de înot pentru olimpici poate fi alimentat de trei robinete, pe care vom conveni să le numim prescurtat R_1, R_2 și R_3, iar evacuarea apei din el este asigurată printr-o conductă (golire de fund), prevăzută cu o vană de închidere.

Nu cunoaștem volumul de apă necesar a umple bazinul pînă la nivelul normal, nici debitele de alimentare ale celor trei robinete și nici debitul de evacuare al conductei de golire, care — vom admite pentru ușurința calculelor — este constant. Precizăm că debitele de alimentare sînt practic constante, iar cel de evacuare — fiind funcție de înălțimea coloanei de apă din bazin — este variabil și anume scade odată cu înălțimea acesteia. Rămînem deci la ipoteza simplificatoare că toate debitele — și de alimentare și de evacuare — sînt constante. Știm doar că R_1 curgînd singur poate umple bazinul în 12 ore, R_2 în 4 ore, iar R_3 în 6 ore ; conducta de evacuare golește bazinul în 6 ore.

Organizatorii unui concurs se prezintă la bazin și — spre marea lor nemulțumire — îl găsesc gol. În această situație ei cer „hidrotehnicianului" bazei sportive să le precizeze în cît timp se poate umple bazinul, pentru a putea fixa ora începerii concursului. Acesta face cîteva calcule și răspunde în variante :

a) Dacă funcționează toate cele trei robinete, am nevoie de... ore ;

b) Dacă funcționează numai R_1 și R_2 am nevoie de... ore ;

c) Dacă funcționează robinetele R_1 și R_3 am nevoie de ... ore.

Dumneavoastră sînteți invitați să refaceți calculele hidrotehnicianului și să completați spațiile libere de mai sus.

În realitate însă, gospodarul apei — deși a avut șansa să-i funcționeze toate cele trei robinete de alimentare — a uitat să închidă vana de golire. Deduceți ușor că prin intermediul celor trei robinete bazinul se umple, dar în același timp el pierde apă prin conducta de golire. Și tot așa de ușor veți deduce, că mai trebuie să răspundeți la o întrebare :

d) În cîte ore se umple bazinul în această ipoteză ? Și încă una :

e) Care trebuia să fie debitul conductei de golire, ca apa să nu se acumuleze deloc în bazin ?

Răspunsuri :

a) Alimentarea se făcea prin robinetele R_1, R_2 și R_3, iar golirea era închisă. R_1 umple singur bazinul în 12 ore, deci într-o oră va umple $\frac{1}{12}$ din volumul bazinului. Cu judecăți similare ajungem la concluzia că tot într-o oră R_2 va umple $\frac{1}{4}$ din volumul bazinului, iar R_3 umple $\frac{1}{6}$ din acest volum.

Curgînd împreună, cele trei robinete vor umple într-o oră :

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \text{ din volumul bazinului.}$$

Rezultă că pentru a umple întreg bazinul, cele trei robinete au nevoie de 2 ore. Apelați și la regula de trei simple și veți ajunge la același rezultat.

b) Alimentarea se făcea prin R_1 și R_2, iar golirea era închisă. Cele două robinete vor umple într-o oră ;

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \text{ din volumul bazinului.}$$

Pentru a umple întreg bazinul, sînt necesare 3 ore.

c) R_1 și R_3 alimentează, iar golirea este închisă.

Într-o oră se va umple :

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4} \text{ din volumul bazinului.}$$

Bazinul va fi umplut în 4 ore.

d) R_1, R_2 și R_3 alimentează, iar golirea este deschisă (cazul „real" petrecut !).

Într-o oră se va umple :

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \text{ din volumul bazinului.}$$

Deci bazinul se va umple în 3 ore.

e) Debitul conductei de golire — pentru a nu se acumula apă în bazin — trebuie să fie egal cu suma debitelor de alimentare.

La răspunsul a) de mai sus am văzut că cele trei robinete umpleau într-o oră $\frac{1}{2}$ din volumul bazinului și că puteau umple bazinul în 2 ore. Conducta de evacuare trebuie să facă operația inversă — golirea tot în 2 ore, deci debitul ei trebuie să fie $\frac{1}{2}$.

Observații

1. În toate fracțiile de mai sus, la numărător am pus numărul 1, considerînd volumul bazinului egal cu unitatea. Raționamentele erau identice, dacă în loc de 1 puneam V, adică volumul necunoscut al bazinului. La numitor apar peste tot orele, astfel încît fracțiile $\frac{1}{12}$ sau $\frac{V}{12}$, $\frac{1}{4}$ sau $\frac{V}{4}$ etc., reprezintă cantitatea sau volumul de apă supra numărul de ore, ceea ce nu este altceva decît debitul orar al robinetului respectiv, sau al conductei de evacuare (sau debitele însumate).

2. Se vede ușor că debitul de alimentare al lui R_3 este egal cu cel de golire, adică acestea se anulează reciproc. Deci, dacă ar alimenta numai R_3 și vana de golire ar fi deschisă, nu s-ar acumula apă în bazin. Înseamnă că umplerea bazinului în varianta d) s-a datorat robinetelor R_1 și R_2, adică ne-am situat de fapt în cazul b), ceea ce explică și rezultatele identice găsite de noi (3 ore).

81. Problema profesorului de gimnastică

Pentru sărbătorirea zilei de 23 August se organizează pe stadionul bucureștean cu același nume, un frumos program artistic cultural, care cuprinde și o „repriză de gimnastică", executată de pionierii Capitalei.

Numărul pionierilor considerat necesar și recrutat pentru programul de gimnastică este 390.

La una din repetiții, profesorul care conducea acest program, deși nu face apelul, remarcă destul de ușor, că lipseau cîțiva pionieri.

Prin natura sau tipul de exerciții pe care le fac, pionierii sînt aranjați în grupe complete de 5; 7 sau 11, fără a rămîne nici un pionier în afara grupelor.

După program, intransigentul profesor cere fiecărui comandant de subunitate, să-i dea lista nominală a absenților, atrăgîndu-le atenția că știe exact numărul total al acestora.

Puteți să refaceți și dumneavoastră calculele profesorului de gimnastică și să determinați numărul total al absenților de la această repetiție ?

Răspuns :

Dacă pionierii puteau fi așezați în grupe complete de 5 ; 7 și 11, rezultă că numărul celor prezenți trebuie să fie divizibil cu fiecare din aceste trei numere.

Vom concluziona deci, că numărul celor prezenți pe stadion este un multiplu al numerelor 5 ; 7 și 11.

Ca urmare, vom calcula mai întîi cel mai mic multiplu comun al acestor numere și apoi vom judeca în ce măsură acesta, sau ceilalți multipli comuni mai mari, satisfac condițiile problemei.

În cazul nostru cel mai mic multiplu comun al celor trei numere nu este altul decît produsul lor, adică $5 \times 7 \times 11 = 385$.

Prin text se arată că profesorul avea sub comanda sa 390 pionieri și că el observase că îi lipseau cîțiva. Rezultă că au fost prezenți 385 pionieri și că au lipsit doar 5.

Observații :

1. Nu am putut lua în considerare un multiplu comun mai mare al numerelor 5 ; 7 și 11 (de exemplu $2 \times 385 = 770$; sau $3 \times 385 = 1\,155$), pentru simplul motiv că textul problemei limita numărul pionierilor la 390, iar absenții la... „cîțiva“.

2. Așa cum a fost redactată, problema ascunde totuși o imperfecțiune. Ați observat-o ? Dacă nu, vom încerca să v-o sugerăm noi !

Dacă la diversele exerciții, pionierii „lucrau“ în grupe de 5 ; 7 sau 11, înseamnă că cei 5 absenți nu aveau un rol activ în desfășurarea programului, deoarece ei nu puteau constitui și o grupă de 7 sau de 11, așa cum ar fi fost necesar pentru celelalte genuri de exerciții.

În această situație, pentru a corecta imperfecțiunea problemei, vom conveni că cei 5 pionieri absenți constituiau tocmai rezerva programului, fapt ce i-a permis profesorului să remarce destul de ușor că... „lipseau cîțiva pionieri“ și să știe chiar fără prea multe calcule — și numărul absenților.

82. Problema generalului de corp de armată Nicolae Şova.

Una dintre cele mai glorioase mari unităţi ale armatei române, care a participat la războiul antifascist, a fost Corpul 7 armată, compus din diviziile 19 infanterie și 9 cavalerie. Pornind la începutul lunii septembrie 1944 din Banat, aceste brave divizii s-au acoperit de glorie în bătăliile pentru eliberarea ţării, în cele din pusta maghiară, de pe Tisa, la vest de Tisa și au ajuns la sfîrșitul lunii noiembrie, în faţa puternicelor linii de apărare ale Budapestei.

Cu toată rezistenţa înverșunată a inamicului, ostașii noștri, luînd cu asalt casă cu casă, stradă cu stradă — au ajuns la 15 ianuarie 1945 în centrul Budapestei, în apropierea Dunării, cucerind o mare parte din Pesta. Amintim că partea de est a Budapestei — așezată pe malul stîng al Dunării — se numește Pesta, iar cealaltă parte — de pe malul drept — se numește Buda (de unde și numele său compus Buda-Pesta, sau Budapesta).

În noaptea de 15/16 ianuarie 1945 a fost schimbată misiunea acestui excepţional corp de armată, unităţile sale primind ordin să opereze în Cehoslovacia.

Comandantul corpului 7 armată, generalul Şova Nicolae, prin Ordinul de zi nr. 48 din 17 ianuarie 1945, a adus elogii și recunoștinţa patriei, bravilor săi soldaţi și a ţinut să precizeze pentru adevăr și istorie următoarele :

„Contribuţia corpului 7 armată pentru cucerirea Budapestei este 1/3".

Un general român — în focul bătăliilor, mîndru peste măsură de eroismul ostașilor săi și inclinîndu-se cu evlavie în faţa proaspetelor morminte ale celor căzuţi la datorie — a mai avut timp şi de puţină matematică !

Nu știm care era raportul dintre suprafeţele celor două părţi ale capitalei maghiare (Buda și Pesta) la începutul anului 1945 ! De aceea vom facem următoarele ipoteze — sperăm — apropiate de realitate.

a) Pesta reprezenta 2/3 din Budapesta.

b) Buda și Pesta erau egale.

Şi acum problema !

Arătaţi — tot sub formă de fracţie — pentru ambele ipoteze şi ţinînd seama de calculele generalului român că marea sa unitate eliberase 1/3 din Budapesta, cît a eliberat corpul 7 armată, din Pesta.

Răspuns :

a) Considerînd Budapesta, cu este și normal, ca fiind întregul și, în consecință, Buda o parte iar Pesta două părți din acest întreg trageți o mică linie verticală pe hîrtia dv. și conveniți că aceasta este Dunărea, curgînd de la nord la sud (ca direcție generală), în zona frumoasei capitale maghiare. Construiți un cerc în stînga liniei verticale și două — alăturate — în dreapta ei. Dacă veți fi de acord că primul cerc reprezintă Buda, iar celelalte două Pesta, v-ați situat în ipoteza a din problema noastră (evident — toate cercurile sînt egale).

Eliberînd 1/3 din Budapesta (întregul), corpul 7 armată a eliberat de fapt suprafața echivalentă unui cerc din cele trei desenate de dv. și tot unul din cele două care reprezintă Pesta. Rezultă, în această ipoteză, că ostașii noștri au eliberat 1/2 din Pesta.

b) În ipoteza că cele două părți (Buda și Pesta) sînt egale, construiți cîte trei cercuri (tot egale) pentru fiecare din ele, în stînga și în dreapta Dunării, reprezentată prin linia verticală de pe caietul Dv.

În această situație, întregul (Budapesta) e format din șase cercuri (părți). Dacă ostașii români au eliberat 1/3 din Budapesta, înseamnă că au eliberat suprafața echivalentă cu două cercuri $\left(\frac{1}{3}\cdot 6=2\right)$. Considerînd acum Pesta ca „întreg", care, așa cum am văzut, este formată din trei cercuri, veți observa cu ușurință că cele două cercuri „eliberate" de trupele noastre, reprezintă 2/3 din Pesta.

Notă : La fiecare din cele două ipoteze ale problemei, pentru rezolvare, se putea apela și la regula de trei simple, ținînd seama că mărimile sînt invers proporționale, astfel :

a) Pesta reprezenta 2/3 din Budapesta.

Notăm Budapesta (întregul) cu 1, iar Pesta cu 2/3. După „regula așezării" cunoscută de dv., aceste mărimi le scriem în stînga (una sub alta), iar în dreapta raporturile corespunzătoare lor, semnificînd a cîta parte din suprafața respectivă a fost eliberată de armata noastră.

1 . . . 1/3

2/3 . . . x

$$\text{De unde } x=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

b) Buda și Pesta erau egale (deci Pesta reprezenta 1/2 din Budapesta).

Conform celor de mai sus, avem :

$$\begin{matrix} 1 \ldots 1/3 \\ 1/2 \ldots x \end{matrix} \quad . \quad \text{De unde } x = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Regăsim, astfel, rezultatele de mai sus !

Și acum, o întrebare suplimentară : în ce raport trebuia să se afle Pesta față de Buda, pentru ca eliberînd 1/3 din Budapesta, să se poată afirma că armata noastră a eliberat în întregime Pesta, sau o suprafață egală cu ea ?

Calculați singuri, folosind metoda grafică — intuitivă de mai sus. Noi vă dăm doar rezultatul : 1/2.

83. Permutări la o echipă de volei [+]

Antrenorul unei echipe de volei are probleme cu modul de aranjare în teren a celor șase jucători de bază, deoarece o parte din ei nu acceptă doar rolul de „ridicători", susținînd că sînt tot atît de buni și „trăgători".

După ce întocmește cîteva scheme și doi jucători se arată în continuare nemulțumiți, el ia următoarea hotărîre : „de acum înainte pentru fiecare set, modul de așezare a jucătorilor în teren va fi astfel conceput, încît să existe cel puțin o schimbare de locuri, față de setul anterior".

Totodată, el cere antrenorului secund să-i prezinte toate schemele posibile, pentru a le aplica chiar de la primul joc.

În aceste condițiuni, sînteți invitați să calculați și dumneavoastră numărul de așezări distincte pe care le poate concepe antrenorul secund, cu cei șase jucători de bază, astfel încît să nu se repete două situații identice. În același timp, veți răspunde și la întrebarea, după cît timp se revine la așezarea inițială ?

Răspuns :

Prin text se cere să luăm șase jucători, și să le schimbăm pozițiile relative, fie schimbînd ordinea sau poziția unui singur jucător, fie a doi sau mai mulți între ei, astfel încît de fiecare dată

să avem cel puţin o schimbare în modul lor de aşezare (ordonare), faţă de toate cele precedente.

O asemenea operaţie se numeşte «permutare» (vedeţi problema nr. 66).

Avem :

P6=6 !=6×5×4×3×2×1=720.

Deci, antrenorul secund va trebui să prezinte antrenorului principal, nu mai puţin de 720 de scheme de aranjare a jucătorilor pentru fiecare nou set. Cum în medie la un joc de volei sînt 4 seturi, înseamnă că se va reveni la schema iniţială, după 180 de jocuri, adică după aproximativ 3 ani.

84. Întrecere automobilistică

În cadrul unui raliu automobilistic, un fel de circuit prin „România Pitorească“, să urmărim doar trei echipaje E_1, E_2 şi E_3, fără să ne intereseze datele referitoare la celelalte echipaje şi nici clasamentul.

Echipajul E_1 parcurge întregul circuit cu o viteză medie de 100 km/oră, într-un timp mai mic cu 3 ore decît acela al echipajului E_2 ; echipajul E_3 parcurge aceeaşi distanţă mergînd cu o viteză medie de 80 km/oră, într-un timp mai mare cu 3 ore decît al echipajului E_2.

Vi se cere să găsiţi, pe bază de raţionamente simple, viteza medie realizată de echipajul E_2.

Răspuns 1 :

Vom observa mai întîi că nu cunoaştem nici o dată despre echipajul E_2.

În această situaţie nu avem altceva mai bun de făcut, decît să le dăm drumul în cursă şi să facem unele observaţii asupra celorlalte două echipaje, despre care problema ne-a furnizat unele date. Deci : start !

Avînd viteza medie mai mare, echipajul E_1 va ajunge primul la destinaţie şi din acel moment, echipajul E_3 mai are de mers încă 6 ore (diferenţa de timp între E_1 şi E_3 ; recitiţi textul !). În aceste 6 ore, cu viteza de 80 km/oră, echipajul E_3 mai are de parcurs 480 km. Adică avansul de distanţă a lui E_1 faţă de E_3, cînd E_1 a ajuns la capătul cursei, este de 480 km.

De unde provine acest avans ? Tocmai din diferenţa de viteze de 20 km/oră dintre cele două echipaje, ceea ce înseamnă că în

fiecare oră de la plecare, E_1 a cîştigat un avans de 20 km faţă de E_3. Cum avansul (depăşirea) totală a lui E_1 faţă de E_3 este de 480 km şi acest lucru s-a datorat faptului că E_1 a cîştigat în fiecare oră cîte 20 km înseamnă că pentru a realiza o asemenea ispravă, E_1 a avut nevoie de 480 : 20=24 ore. Acesta este timpul în care echipajul E_1 a parcurs întregul circuit.

Ţinînd seama că E_1 a mers cu 100 km/oră rezultă că lungimea circuitului a fost de 100 km/oră×24 ore=2 400 km.

Timpul echipajului E_2 fiind mai mare cu 3 ore decît al echipajului E_1, rezultă că a fost de 24+3=27 ore, iar viteza medie a lui E_2 a fost de 2 400 km : 27 ore=88,88 km/oră, mai mică, deci, decît media vitezelor celorlalte două echipaje

Notă : Încercaţi o rezolvare prin raţionamente asemănătoare, considerînd că echipajul E_3 a ajuns la destinaţie, în timp ce echipajul E_1 a continuat cursa dincolo de linia de sosire şi a parcurs în plus, în acelaşi timp, 100 km/oră×6 ore=600 km. Referiţi-vă apoi la întîrzierea orară de 20 km a lui E_3 faţă de E_1 şi veţi găsi timpul echipajului E_3 (600 km : 20 km/oră=30 ore).

Mai departe, continuaţi singuri !

În cele ce urmează, vi se dă o rezolvare mai detaliată (tot pe calea aritmetică) şi apoi o rezolvare folosind metodele furnizate de algebră.

Răspuns 2 :

Pentru probleme de acest gen, vă recomandăm să întocmiţi un tabel de felul celui de mai jos, în care veţi trece datele furnizate de textul problemei ; veţi avea astfel posibilitatea să separaţi şi să evidenţiaţi datele cunoscute faţă de cele necunoscute şi în acelaşi timp să alegeţi calea cea mai convenabilă de rezolvare.

Distanţa parcursă fiind aceeaşi pentru cele trei echipaje, o vom nota cu D. Pentru viteze şi timpi vom folosi numerele pe care le-am dat echipajelor. Adică, pentru echipajul E_1, vom nota viteza cu V_1 şi timpul cu T_1 etc.

Echipajul	Distanţa în km	Viteza medie în km/h	Timpul în ore (h)
E_1	D	V_1=100 km/h	$T_1=T_2-3$
E_2	D	V_2=	$T_2=T_1+3$
E_3	D	V_3= 80 km/h	$T_3=T_2+3$ $=T_1+6$

Reluînd judecata de la răspunsul 1, facem constatarea că echipajul E_1 — avînd viteza medie cea mai mare — va ajunge primul la destinaţie şi din acel moment echipajul E_3 mai are de mers încă 6 ore. Am evidenţiat în tabelul de mai sus, la ultima coloană, această relaţie între T_1 şi T_3, rezultată din enunţul problemei ($T_3=T_1+6$ ore).

În această situaţie, cînd E_1 a terminat cursa, E_3 mai are de parcurs :

$$6 \text{ h} \times 80 \text{ km/h} = 480 \text{ km.}$$

Construiţi şi un grafic, în care încercaţi să prindeţi acest moment : E_1 a ajuns la capătul cursei, iar E_3 mai are de parcurs aceşti 480 km. Construiţi de asemenea un grafic al vitezelor echipajelor E_1 şi E_3, din care să rezulte faptul că E_1 devansează pe E_3 în fiecare oră cu 20 km şi în concluzie pentru a-l devansa în final cu 480 km, lui E_1 îi sînt necesare 480 km : 20 km/h=24 h.

Dacă $T_1=24$ h, după formulele din tabel, rezultă imediat :

$$T_2=T_1+3=24+3=27 \text{ h.}$$
$$T_3=T_1+6=24+6=30 \text{ h.}$$
$$D=100 \text{ km/h} \times 24 \text{ h}=2\,400 \text{ km.}$$
$$V_2=\frac{D}{T_2}=\frac{2400 \text{ km}}{27 \text{ h}} \equiv 88{,}88 \text{ km/h}$$

Răspuns 3 :

Apelînd la metodele algebrei, rezolvarea e mult mai simplă, dar nu oferă satisfacţiile metodelor anterioare.

Distanţa D, parcursă atît de E_1 cît şi de E_3, fiind aceeaşi, vom egala produsul dintre viteza şi timpul echipajului E_1, cu cel dintre viteza şi timpul echipajului E_3 (vedeţi tabelul de la răspunsul nr. 2, care — în plus — ne facilitează rezolvarea pe cale algebrică, tocmai prin faptul că au fost evidenţiate şi ordonate datele problemei).

$$100(T_2-3)=80(T_2+3)$$

Rezolvînd, rezultă $T_2=27$ ore.

În continuare, revenim la rezolvările de la metodele aritmetice.

85. Golgeterul echipei de fotbal

Înaintea antrenamentului de marți, trei băieți — toți feciori de fotbaliști se iau la harță, fiecare susținînd că tăticul lui a înscris cele mai multe goluri. Nu-i greu de ghicit că ei sînt — real sau numai pentru trebuințele problemei noastre — copiii renumiților jucători A, B, C.

Cum nu-i nici un chip să se înțeleagă, ei se năpustesc pur și simplu asupra căpitanului echipei și-i cer să le spună, de partea cui este adevărul.

Căpitanul echipei are puțin timp liber și fiind el însuși „tătic" și mare iubitor de copii, găsește prilejul să se amuze, punîndu-i la încercare. Iată răspunsul său :

Pînă în prezent cei trei jucători au înscris în total 30 de goluri, însă jumătate din numărul golurilor înscrise de C este egală cu o treime din numărul golurilor înscrise de B.

Copiii C II și B II strigă simultan : „E clar că tăticu meu a înscris cele mai multe goluri" !

„Ascultați mai departe, reia căpitanul echipei : o treime din numărul golurilor înscrise de B este egală cu o cincime din numărul golurilor înscrise de A".

Acum A II și B II revendică întîietatea, dar căpitanul ține să completeze : „Deși nu era necesar, vă precizez că jumătate din numărul golurilor înscrise de C este egală cu o cincime din numărul golurilor înscrise de A. Și acum, urcați în tribună și pînă terminăm noi antrenamentul, să-mi dați răspunsul" !

Ajutați de mămici, unchi, bunicuțe sau binevoitori, cei trei copii de fotbaliști rezolvă bine problema și stabilesc golgeterul echipei și numărul de goluri înscrise de fiecare „tătic".

Dacă ați fi fost în tribună și ați fi asistat la acest antrenament, ați fi putut da o mînă de ajutor celor trei copii ?

Răspuns :

Sfătuiți de „ajutoarele" lor din tribună, cei trei puști au dat fuga la magazie și au luat contra bon, treizeci de mingi, adică un număr egal cu golurile înscrise de părinții lor. Le-au așezat grămadă în fața lor și au găsit cu ușurință un binevoitor care să le facă administrația ce va urma. Au cerut apoi și au primit cîte o minge, ceea ce însemna că cel puțin cîte un gol a marcat fiecare din cei trei jucători.

Au făcut în continuare raționamentele următoare :

— O minge în fața lui A II reprezintă o cincime din numărul de goluri înscrise de tatăl său și este evident egală cu o minge din fața lui B II, care reprezintă de fapt o treime din numărul de goluri înscrise de tatăl său și este egală tot cu o minge din fața lui C II care — conform textului problemei — reprezintă o doime din numărul golurilor înscrise de tatăl său ;

— dacă o minge reprezintă 1/5 (o cincime) din numărul golurilor înscrise de tatăl său, A junior a pretins să i se mai dea patru mingi, adică să aibă în total cinci mingi, care să reprezinte întregul 5/5 ;

— în mod asemănător, B junior a primit în total trei mingi, iar C junior două mingi ;

— primind toți trei 5+3+2=10 mingi și rămînînd nedistribuite douăzeci de mingi, ei au mai cerut să se repete încă de două ori operația de distribuire a mingilor, în aceleași rapoarte. Deci au mai primit fiecare, în ordinea de mai sus $2\times5=10$; $2\times3=6$; $2\times2=4$ mingi, adică în final au primit :

A junior 15 mingi ;
B junior 9 mingi ;
C junior 6 mingi.

Cum fiecare minge reprezenta un gol marcat, rezultatele găsite de ei reprezintă și soluția problemei (faceți verificarea cu textul în față), pentru care căpitanul echipei i-a „felicitat“ cu cîte un suc și o prăjitură, fără a face diferențiere funcție de eficacitatea părinților lor.

86. Pe brațul Sulina

Pescarii se întorc cu recoltă bogată din largul mării, își leagă bărcile pline de pește de un remorcher și acesta pornește către Tulcea.

După un timp de mers împotriva curentului, una din bărci se desface și rămîne în voia valurilor, dar acest lucru este observat de marinarii de pe remorcher abia după o oră de la desprinderea bărcii, atunci cînd convoiul ajunsese la destinație.

Imediat se dă ordin ca remorcherul să plece înapoi pentru a recupera barca pierdută și acest lucru se petrece la un punct situat la 8 km aval de locul în care s-a desprins barca.

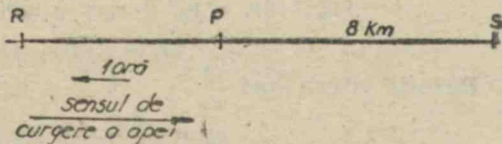
Şi acum întrebările :

1) Calculaţi viteza apei, respectiv a bărcii desprinse din convoi şi purtată de curentul apei.

2) Generalizaţi problema şi arătaţi că viteza proprie a remorcherului (necorectată de viteza apei) nu are nici o influenţă asupra rezolvării şi rezultatelor problemei.

Notă: Consideraţi că viteza remorcherului nu este afectată de greutăţile bărcilor pe care le remorchează.

Răspuns 1 :



În schema de mai sus am notat cu *R* punctul de la care remorcherul s-a întors pentru a recupera barca pierdută, cu *P* locul în care s-a desprins barca de restul convoiului şi a început să fie purtată de apă către aval şi cu *S* punctul în care remorcherul a ajuns barca pierdută.

Conform datelor problemei, distanţa PS este de 8 km, iar timpul în care remorcherul a parcurs către amonte distanţa de la P la R este de 1 oră.

Vom scrie o ecuaţie în care vom exprima egalitatea dintre timpul Tb în care barca pierdută a parcurs distanţa de la P la S şi timpul Tr în care remorcherul a parcurs către amonte distanţa de la P la R (1 oră) şi către aval distanţa RS.

Deoarece barca lăsată în voia curentului merge către aval cu o viteză egală cu viteza apei (v_a), timpul în care ea parcurge distanţa PS (8 km) este egal cu

$$Tb = \frac{8}{v_a}$$

Timpul de mers Tr al remorcherului este egal cu 1 oră către amonte (de la P la R), plus timpul către aval de la R la S, care este $\frac{RP+8\ km}{v_a + v_r}$ deci vom avea :

$$Tr = 1 + \frac{RP+8}{v_a + v_r}$$

în care v_r este viteza proprie a remorcherului în apă necurgătoare.

Deoarece RP = PR = 1 $(v_r - v_a)$ în care 1 este o oră, adică timpul în care remorcherul a parcurs această distanță către amonte, vom avea :

$$Tr = 1 + \frac{v_r - v_a + 8}{v_a + v_r}$$

Egalînd Tb=Tr avem :

$$\frac{8}{v_a} = 1 + \frac{v_r - v_a + 8}{v_a + v_r}$$

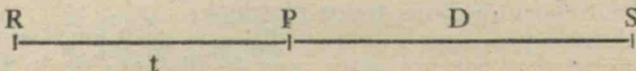
$$8v_a + 8v_r = v_a^2 + v_a v_r + v_a v_r - v_a^2 + 8v_a$$

$$8v_r = 2v_a v_r$$

Rezultă viteza apei

$$v_a = \frac{8}{2} = 4 \text{ km/h}$$

Răspuns 2 :



Pentru cazul general am notat distanța PS cu D și timpul în care remorcherul navighează în amonte de la P la R cu t.

Conform celor arătate anterior avem :

$$Tb = \frac{D}{v_a}$$

$$Tr = t + \frac{t(v_r - v_a) + D}{v_a + v_r}$$

$$\frac{D}{v_a} = t + \frac{t(v_r - v_a) + D}{v_a + v_r}$$

$$Dv_a + Dv_r = t \cdot v_a^2 + t \cdot v_a v_r + t \cdot v_a v_r - t \cdot v_a^2 + D \cdot v_a$$

$$D = \frac{2 \cdot t \cdot v_a \cdot v_r}{v_r}$$

$$D = 2 \cdot t \cdot v_a$$

$$v_a = \frac{D}{2t}.$$

Observaţi că viteza proprie a remorcherului (v_r) s-a simplificat, astfel încît ea nu a influenţat, rezultatul la care am ajuns.

Notă suplimentară :

În cazul în care timpul t vi se dă în minte sau alte unităţi de măsură, este necesar să-l transformaţi în ore. În acest fel veţi putea să calculaţi direct viteza apei, cu formula de mai sus, în kilometri pe oră.

Astfel dacă D=3 km, iar t=30minute, vom considera

$$t = \frac{1}{2} \text{ h și vom avea :}$$

$$v_a = \frac{D}{2t} = \frac{3}{2\frac{1}{2}} = 3 \text{ km/oră}$$

Cînd compuneţi astfel de probleme este bine să reţineţi că viteza apelor de şes variază aproximativ între 0,6 km/h şi 4 km/h, astfel încît raportul $\frac{D}{t}$ nu poate fi practic mai mare de 8.

87. De-ale Olimpiadei

La Olimpiada din 1984 din Los Angeles, la proba de paralele inegale de la exerciţiile „liber alese", Ecaterina Szabo a prezentat un exerciţiu deosebit de dificil.

Din nefericire — datorită dificultăţii exerciţiului şi rapidităţii de execuţie — Cati a comis o greşeală scăpînd bara şi aterizînd defectuos. Comisia de arbitri a fost foarte severă şi a notat-o cu numai 9,30. Dacă ar fi primit cel puţin 9,35, Cati ar fi devenit campioană olimpică şi la individual compus, dar — în situaţia menţionată mai sus — a trebuit să se mulţumească doar cu locul II, deci cu medalia de argint. Cum însă neşansele au şi ele o limită — un grad de probabilitate oarecare — Cati s-a revanşat şi a obţinut în final încă patru medalii de aur.

Un grup de elevi, afectaţi de cele întîmplate, au fost foarte nemulţumiţi cu prevederile regulamentului şi au propus modificarea lui astfel :

— pentru fiecare exerciţiu, cu dificultăţi ieşite din „media vîrfurilor" pe plan mondial, să se acorde o bonificaţie de 30 sutimi

(0,30), peste nota maximă 10 (zece), de la care se pornește notarea în jos a acestor vîrfuri ;

— să se scadă (ca și pînă acum) 50 sutimi pentru pierderea („scăparea") aparatului și cîte 10 sutimi pentru fiecare inexactitate ;

— media generală, la un aparat, calculată ca mai sus, se va reduce la 10 (zece), în cazul în care este depășită această bază, iar sutimile rezultate peste 10 se vor lua în considerare, numai în situația în care mai multe concurente vor obține media generală 10, pentru departajarea lor.

Elevii au considerat că propunerile lor sînt corecte și că au menirea să asigure progresul gimnasticii feminine, încurajînd execuția unor noi procedee spectaculoase — de excepție.

Totodată ei au compus și următoarele probleme, pe care vă invită să le rezolvați :

1) Ce notă ar fi trebuit să primească Ecaterina Szabo — după regulamentul lor — precizînd că ea a prezentat două noi procedee de excepție și respectînd aprecierea arbitrilor de a i se scădea 50 de sutimi pentru scăparea barei și 20 de sutimi pentru două mici inexactități ?

2) La campionatul mondial din 1986, ei prevăd că Simona Păuca va prezenta — încurajată de noul regulament — un număr oarecare de noi procedee de mare efect, dar — inerent — va avea și cîteva inexactități, în total un număr de șapte noutăți și inexactități, luate la un loc. Dumneavoastră — pe bază de raționamente — va trebui să calculați cîte noutăți de excepție va prezenta Simona Păuca și cîte inexactități vor înregistra arbitrii știind că îi va reveni nota 10,50.

3. La același viitor concurs, o altă stea a gimnasticii românești și mondiale — va primi nota 10,10 după ce în evoluția ei se vor putea observa — adunate la un loc — tot șapte procedee în premieră și mici inexactități. Cîte procedee noi de mare dificultate și cîte mici inexactități se vor înregistra pentru aceasta ?

Răspunsuri :

1. Deoarece Cati a prezentat două noi procedee, înseamnă că la nota 10 trebuia să i se adauge $2 \times 0{,}30 = 0{,}60$ puncte (șaizeci de sutimi), din care se puteau scade 0,70 puncte, rezultînd astfel nota **9,90.**

2. Vom face ipoteza că Simona va executa totul perfect, deci că va prezenta șapte noutăți de excepție, fără nici o inexactitate. Ce notă i se va cuveni Simonei ?

$$10 + 7 \times 0,30 = 12,10$$

Simona va primi însă nota 10,50 deci noi — prin ipoteza făcută — i-am acordat în plus 12,10 — 10,50 = 1,60 puncte.

De unde provine acest plus ? Tocmai din faptul că și pentru inexactitățile pe care considerăm că le va avea, în loc de a-i scădea cîte 0,10 puncte, i-am adăugat 0,30 puncte, deci pentru fiecare inexactitate noi am favorizat-o cu 0,40 puncte (0,10 care trebuiau scăzute, plus 0,30 pe care i le-am acordat noi, prin ipoteza făcută).

Cum în total noi am „favorizat-o" cu 1,60 puncte și la fiecare inexactitate am favorizat-o cu 0,40 puncte, înseamnă că Simona va avea 1,60 : 0,40 = 4 inexactități. Din totalul de șapte (bune și rele), dacă scădem patru inexactități, vor rămîne trei procedee de excepție.

3. Pentru a treia gimnastă, raționamente și calcule similare ne vor arăta că va introduce două procedee în premieră mondială și că va avea cinci mici inexactități.

88. Vali și problema sa [—]

În cutia cu bomboane cubaneze, avînd toate aceeași formă, mărime și înveliș, au mai rămas 3 bomboane cu esență de portocale, 4 cu esență de lămîie și 5 mentolate.

S-a dat stingerea pentru micuța Vali, dar ea vrea — neapărat — să mai mănînce o bomboană mentolată, deși nu poate aprinde lumina, de teama părinților săi, care încă mai foiesc prin jur. Ispita este însă atît de mare, încît Vali se hotărăște să facă acest lucru pe întuneric și să consume cîte bompoane va fi nevoie, pînă cînd va nimeri una mentolată, și cu aceasta să încheie micile năzdrăvănii din acea zi.

Zis și făcut !

Și în timp ce consumă, una după alta, bomboanele din cutie, ea are timp să compună și să rezolve următoarea problemă, cu două subpuncte :

— cîte bomboane trebuie să mănînce — ca în mod neîndolos — să găsească una mentolată ?

— idem, ca să „guste", din fiecare sort de bomboane, cel puțin cîte una ?

Răspuns :

Problema se adresează micilor școlari, care pot primi explicații de la un „matematician" mai vîrstnic și de aceea dăm numai răspunsurile în ordinea întrebărilor : 8 și 10.

89. Autobuzele bucureștene

— De ce mergi, tovarășe, așa de încet ? Nu vezi că te-au depășit două autobuze, care au plecat după dumneata de la capul liniei ?

Revolta unei tovarășe, grijulie să nu întîrzie la serviciu, petrecută într-un autobuz, în preajma orei 7 dimineața, avea oarecare justificare, dar nici un alt pasager nu i-a venit în ajutor, iar șoferul a răspuns destul de calm, explicînd cum nu se poate mai corect, motivele mersului său mai încet :

— Uitați-vă cît de libere sînt autobuzele care ne-au depășit și cît de aglomerat e al meu ! Nu vedeți cît timp pierd în fiecare stație ?

Acest mic incident ne-a sugerat următoarea problemă, care are la bază unele date apropiate de realitate și care vin în ajutorul șoferului admonestat, incorect, de pasageră.

Și acum problema !

De la capul liniei pleacă în ordine, autobuzele *A*1, *A*2, *A*3, la intervale de 3 minute. Durata de parcurs între două stații este de 2 minute pentru fiecare autobuz, iar duratele de oprire în stații sînt în ordine : pentru *A*1 — 60 secunde ; pentru *A*2 — 30 secunde ; pentru *A*3 — 10 secunde.

Deduceți ușor, că autobuzul *A*1 este foarte aglomerat și că în el a avut loc discuția de mai sus ; autobuzul *A*2 este mai puțin aglomerat, iar *A*3 este destul de liber, aceste situații influențînd direct duratele de staționare.

Vi se cere să calculați, după cît timp (eventual în ce stație) *A*2 ajunge din urmă pe *A*1, *A*3 ajunge din urmă pe *A*1, *A*3 ajunge din urmă pe *A*2 ? Se întîlnesc cele trei autobuze în aceeași stație ? Dacă nu, ce modificări propuneți în datele problemei, pentru ca cele trei autobuze să se afle simultan în aceeași stație ?

Rezolvare :

Numerotăm stațiile cu O — stația de la capul liniei, apoi cu I, II, III etc., în ordinea normală a sensului de mers și vom da drumul mașinilor în cursă, ca să nu întîrzie salariata care ne-a inspirat această problemă.

a) Vom fixa momentul $M1$, în care autobuzul $A2$ pleacă în cursă, adică la 3 minute de la plecarea lui $A1$.

Pentru parcurgerea unei distanțe dintre două stații consecutive — o vom nota cu d — autobuzul $A1$ are nevoie de 3 minute (180 secunde) în care am inclus și timpul de staționare, iar autobuzul $A2$ de 2 minute și 30 secunde, deci de 150 secunde. Rezultă că după parcurgerea unei distanțe d între stații, $A2$ recuperează din întîrzierea sa față de $A1$.

$$180'' - 150'' = 30''$$

Observați că cele 30 secunde reprezintă de fapt diferența între timpii de staționare!

Cum în total $A2$ trebuie să recupereze 3 minute (180 secunde), înseamnă că el va ajunde pe $A1$, după:

$$N \text{ stații} = \frac{180''}{30''/d} = 6\ d$$

Adică, după parcurgerea a 6 stații de către $A2$ (deci în stația VI) și a 5 stații de către $A1$ (incluzînd și staționările).

Din stația VI, autobuzele $A1$ și $A2$ pleacă simultan și vor ajunge tot simultan în stația VII, de unde $A2$ va pleca cu 30 secunde mai devreme decît $A1$.

Verificăm:

Timpul lui $A1$ este $5 \times 3' = 15'$
Timpul lui $A2$ este $6 \times 2'30'' = 15'$
Deci, timpurile sînt egale, calculele se verifică.

b) În mod asemănător, calculăm locul sau timpul în care $A3$ ajunge din urmă pe $A1$, adică ajung, pleacă sau staționează simultan în aceeași stație.

Notăm cu $M2$ momentul în care $A3$ pleacă din stația O, deci la 6 minute de la plecarea lui $A1$. În acest moment, $A1$ pleacă din stația II și are — evident — un avans de 6 minute față de $A3$.

Deoarece pentru parcurgerea intervalului între două stații consecutive, inclusiv staționarea, $A1$ are nevoie de 3 minute (180''), iar $A3$ de 2 minute și 10 secunde (130''), înseamnă că după parcurgerea fiecărui interval între două stații, adică în momentul plecării din fiecare stație, $A3$ recuperează din întîrzierea față de $A1$:

$$180'' - 130'' = 50''$$

În acest fel, cele 6 minute (360"), întîrzierea totală a lui *A3* față de *A1*, vor fi recuperate după :

$$\frac{360''}{,} = 7.2\ d$$

Verificăm :

Pentru *A3* timpul este 7,2 × 2'10" = 15'36"
Pentru *A1* timpul este 5,2 × 3' = 15'36".
Deci, calculele se verifică.

Cum noi știm că între două stații vitezele de deplasare ale celor trei autobuze sînt egale, rezultă că *A1* și *A3* nu se pot întîlni pe distanța *d* între două stații. În acest caz vom analiza ce se întîmplă atît în stația VII, cît și în stația VIII.

În stația VII.

A1 ajunge după 14' și pleacă după 15' (de la momentul *M2* !).

A3 ajunge după 15' (6×2'10"+2' = 15') și pleacă după 15'10" de la același moment *M2*.

Rezultă că atunci cînd *A1* pleacă din stația VII, *A3* ajunge în această stație și pleacă cu 10" întîrziere. Observați că aceste 10", față de cele 50", cît recuperează *A3* față de *A1*, nu reprezintă altceva decît acel 0,2 (de la 7,2 stații sau intervale, rezultat mai sus), adică reprezintă explicația acestuia $\left(\frac{10}{50} = 0{,}2\right)$

În stația VIII.

A1 ajunge după 17' și pleacă după 18' de la momentul *M2*.

A3 ajunge după 17'10" și pleacă după 17'20" de la momentul *M2*.

Deci, cele două autobuze staționează simultan în stația VIII în cele 10" cît staționează *A3* (între 17'10" și 17'20").

Notă : În acest caz, un grafic pe hîrtie milimetrică sau pe un caiet de matematică, va fi deosebit de ilustrativ.

c) După cîte stații ajunge *A3* pe *A2* ?

Ne vom situa tot în momentul *M2*, în care *A3* pleacă din stația 0, iar *A2* — plecat cu 3 minute mai înainte — este deja plecat din stația I de 30 secunde (revedeți textul !).

Dacă *A3* are nevoie de 2'10" (130") pentru a parcurge o distanță ***d*** între două stații (inclusiv staționarea), iar *A2* de 2'30" (150"), înseamnă că la fiecare stație, *A3* recuperează 20" din întîrzierea

sa față de $A2$ de 3 minute (180"). Rezultă că $A3$ va ajunge pe $A2$ după :

$$\frac{180''}{20''/d} = 9\ d \text{ (stații).}$$

Verificare :

Pentru $A3$ luăm în calcul 9 stații, inclusiv staționările, deci :

$$9 \times 2'10'' = 19'30''.$$

Pentru $A2$ vom lua în calcul numai 7 stații complete (inclusiv staționările), deoarece el se află în momentul $M2$ între stația I și II și vom adăuga 1'30" cît mai are de parcurs pînă va ajunge la stația II și încă 30" staționarea în II, deci vom mai adăuga 1'30" + 30" = 2'. Deci :

$$7 \times 2'30'' + 2' = 19'30''.$$

Rezultă că cele două autobuze vor pleca simultan din stația IX, după ce staționează împreună 10" în această stație și vor ajunge tot simultan în stația X. Aici vor staționa din nou împreună 10" (timpul de staționare al lui $A3$), iar $A2$ va pleca după alte 20".

d) Pentru ca cele trei autobuze să se întîlnească, este necesar ca $A3$ să ajungă și el în stația VI, în momentul în care se întîlnesc $A1$ și $A2$.

Am văzut că $A1$ și $A2$ se întîlnesc după 15' de la plecarea lui A2 din stația 0 și cum $A3$ va pleca după încă 3', trebuie ca el să ajungă în stația VI după 12'. Menținînd constant și pentru $A3$ timpul de 2' pentru parcurgerea distanței d între două stații, rezultă că trebuie să punem condiția ca $A3$ să nu oprească în nici o stație, pentru ca cele trei autobuze să se întîlnească în stația VI.

90. Răspuns suplimentar la problema magazionerului unei echipe de fotbal (problema nr. 11)

Și acum o rezolvare grafică — intuitivă, fără a mai fi nevoie să împrumutăm jucători, ca la răspunsul inițial.

Pentru ușurința exprimării și înțelegerii, desenați mai multe cerculețe, pe care vom conveni să le considerăm mingi de fotbal, ceea ce reprezintă de altfel o notație (legendă) destul de fidelă ; în jurul fiecărui cerculeț faceți cîte cinci steluțe sau „stele“, adică cinci jucători de fotbal (de data aceasta, s-ar putea ca legenda să nu fie chiar atît de inspirată).

Puneți în continuare... puncte — puncte (adică un număr nedefinit de grupe de cîte cinci jucători în jurul unei mingi) și mai construiți încă două cerculețe (mingi), fără steluțe. În loc de steluțe puteți pune numărul 5.

Revedeți textul și veți conchide că, prin desenul de mai sus, sînteți în cadrul primului exercițiu de antrenament (cinci jucători la o minge și două mingi libere).

Pentru a trece la cel de-al al doilea exercițiu (trei jucători la o minge și doi jucători fără minge), este necesar să luăm cîte doi jucători de la grupele de cinci și să-i trecem la cele două mingi libere (astfel încît la toate mingile să fie cîte trei jucători) și încă doi jucători „liberi" (fără minge).

Observați ușor că pentru aceasta va trebui să luăm opt jucători din grupele de cinci (2 mingi libere $\times$ 3 jucători $=$ 6 jucători ; plus 2 jucători liberi).

Pentru a face „rost" de acești opt jucători, luînd cîte doi jucători de la grupele de cinci, vom apela la $8 : 2 = 4$ grupe de cinci jucători.

Deci, numărul (necunoscut pînă acum) de grupe de cinci jucători la o minge (din primul exercițiu) este patru, corespunzînd la patru mingi în procesul de antrenament. Adăugați cele două mingi libere și veți afla că în total au fost scoase din magazie șase mingi.

Numărul jucătorilor rezultă ușor, din enunțul problemei

$$(4 \times 5 = 20 \;;\; \text{sau } 6 \times 3 + 2 = 20).$$

91. Răspuns suplimentar la problema nr. 16 B

Dacă robinetul al doilea ($R2$) umple bazinul în 12 ore, înseamnă că într-o oră el umple 1/12 din volumul bazinului, iar în 4 ore (cît curge împreună cu $R1$) va umple $4 \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ din bazin.

Restul de 2/3 din volumul bazinului — în aceste 4 ore — va fi umplut de primul robinet ($R1$). Pentru a umple singur bazinul, $R1$ va avea nevoie de $\frac{3}{2} \cdot 4 = 6$ ore. Sau, pentru cei mai mici : $R1$ umple $\frac{2}{3}$ din volumul bazinului în 4 ore, $\frac{1}{3}$ din bazin în 2 ore, iar

pentru a umple întregul volum al bazinului $\left(\frac{3}{3}\right)$, îi va trebui de trei ori mai mult timp, deci $3 \times 2 = 6$ ore.

92. Răspuns suplimentar la problema „O premiere în variante." (problema nr. 38).

Evident, mai sînt și alte soluții sau variante de premiere ! O infinitate chiar, dacă nu se limitează suma destinată pentru premiere ! Ați reținut că prin textul problemei s-a limitat numai numărul premiaților în final (la cinci).

Procedeul de a determina și alte variante este următorul : se caută grupe de numere consecutive, care adunate să ne dea un număr care să se termine cu zero (cifra unităților să fie zero) ; acest număr înmulțit cu 100, valoarea unei bancnote de o sută lei, ne va da numărul miilor și deci al plicurilor de cîte o mie lei, care nu se mai acordă unor betoniști propuși inițial la premiere și care se împart celor rămași pe listă.

Alte soluții :

a) $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$; ($20 \times 100 = 2000$ lei).

Sau $200 + 300 + 400 + 500 + 600 = 2000$ lei. Deci am împărțit 2000 lei, din două plicuri a 1000 lei, în cinci grupe de 200, 300, 400, 500, 600 lei și le-am adăugat la cinci plicuri de cîte 1000 lei. Rezultă că au fost premiați în final cinci betoniști cu cîte : $1000 + 200 = 1200$ lei ; $1000 + 300 = 1300$ lei ; $1000 + 400 = 1400$ lei ; $1000 + 500 = 1500$ lei ; $1000 + 600 = 1600$ lei și fondul a fost 7000 lei (șapte propuneri inițiale de premiere).

b) $9 + 10 + 11 = 30$; ($30 \times 100 = 3000$ lei).

După același procedeu, rezultă că au fost premiați numai trei betoniști cu : $1000 + 900 = 1900$ lei ; $1000 + 1000 = 2000$ lei ; $1000 + 1100 = 2100$ lei (fond de premiere 6000 lei, respectiv șase propuneri inițiale de premiere). Deci din șase plicuri inițiale, au rămas numai trei.

c) $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$; $30 \times 100 = 3000$ lei.

Deci cinci premiați cu cîte : 1400, 1500, 1600, 1700, 1800 lei, opt propuneri, fond de premiere 8000 lei.

d) $11 + 12 + 13 + 14 = 50$; $50 \times 100 = 5000$ lei.

Deci, patru premiați, cu cîte : $1000 + 1100 = 2100$ lei ; $1000 + 1200 = 2200$ lei ; $1000 + 1300 = 2300$ lei ; $1000 + 1400 = 2400$ lei, nouă propuneri, fond de premiere 9000 lei.

Deoarece ultimul premiat a primit 2100 lei, sîntem în situația aparte, enunțată anterior, și putem considera că au mai fost două plicuri de cîte 1000 lei, care s-au adunat într-unul singur și rezultînd 2000 lei (cu o sută mai puțin decît suma dată ultimului premiat), a mai putut fi premiat un betonist.

În această situație au fost unsprezece propuneri, fond de premiere 11 000 lei și cinci premiați cu cîte : 2 000, 2 100, 2 200, 2 300, 2 400 lei.

La același rezultat se ajungea dacă grupul numerelor consecutive îl începeam cu 10 (10+11+12+13+14=60).

e) 6+7+8+9+10=40 ; 40×100=4 000 lei, care se împart în cinci grupe de 600, 700, 800, 900 și 1 000 lei și se adaugă la cinci plicuri de cîte 1 000 lei. Vom avea în final cinci premiați cu cîte : 1 000+600=1 600 lei ; 1 000+700=1 700 lei ; 1 000+800=1 800 ; 1 000+900=1 900 ; 1 000+1 000=2 000 lei. Fond de premiere este de 9 000 lei (5 000+4 000 lei), iar numărul celor propuși inițial la premiere a fost de nouă.

f) 14+15+16+17+18=80 ; 80×100=8 000 lei (care se împart în cinci grupe de 1 400, 1 500, 1 600, 1 700, 1 800 lei și se adaugă la cinci plicuri de 1 000 lei). Avem cinci premianți cu : 2 400, 2 500, 2 600, 2 700, 2 800 lei și fond de premiere 13 000 lei.

Dumneavoastră mai puteți găsi și alte soluții. Observați că dacă la fiecare din soluțiile de mai sus, veți adăuga fiecărui premiat cîte 1 000 lei, 2 000 lei, 3 000 lei etc. (*n* mii lei), la sumele acordate ca premii, veți găsi noi soluții care satisfac condițiile impuse prin text.

Să luăm, de exemplu, soluția d, care derivă din soluția inițială :

Premii acordate : 2 100, 2 200, 2 300, 2 400 lei (total 9 000 lei).

Dar mai pot fi și : 3 100, 3 200, 3 300, 3 400 lei (total 13 000 lei).

4 100, 4 200, 4 300, 4 400 lei (total 17 000 lei).

5 100, 5 200, 5 300, 5 400 lei (total 21 000 lei).

Sau, în general : n. 1 000+100 ; n. 1 000+200 ; n. 1 000+300 ; n. 1 000+400. Total 4 · n · 1 000+1 000 lei sau 1 000 (4n+1).

Același lucru se poate face cu fiecare din soluțiile date de noi, sau găsite de Dv., rezultînd, într-adevăr, că atunci cînd nu limităm și fondul de premiere, avem o infinitate de soluții.

1. Pătratul unui număr care are cifra 5 la unități

Știm pe dinafară : $5^2=25$; $15^2=225$; $25^2=625$.

Dăm mai jos un procedeu simplu și de utilitate curentă pentru aflarea puterii a doua și a unor numere mai mari, terminate cu cifra 5.

Să luăm de exemplu 75^2. Procedeul este următorul : Se înmulțește 7 (cifra zecilor) cu 8 (cifra sau numărul imediat următor) și rezultă 56 ; acestuia i se adaugă după el 25 (provenit din 5^2) și obținem 5 625, exact rezultatul lui 75^2.

Un alt exemplu : 95^2. Avem succesiv $9\times10=90$, apoi scriem 25 și obținem 9 025. Observați că atît 56 cît și 90 reprezintă numărul sutelor.

Dacă știm să înmulțim două numere formate din două cifre, putem calcula mintal și pătratul unor numere de ordinul sutelor, care se termină cu 5.

Exemplu 115^2 : Vom avea $11\times12=132$; deci rezultatul va fi 13 225.

Sau 235^2 : Avem $23\times24=552$; deci 55 225.

Dumneavoastră vă revine sarcina să demonstrați baza teoretică a procedeului. Încercați și numai după aceea consultați răspunsul de mai jos !

Răspuns :

Un număr de două cifre terminat cu 5 este de forma $\overline{x5}$, adică x cifra zecilor și 5 aceea a unităților, deci : $10x+5$, al cărui pătrat va fi :

$$(10x+5)^2=(10x)^2+2\cdot10x\cdot5+5^2=100x^2+100x+25=100x(x+1)+25$$

$$\text{Deci : }\quad \overline{(x5)}^2=x(x+1)100+25.$$

Conform procedeului expus, înmulţim pe x (cifra zecilor) cu (x+1), rezultatul arătîndu-ne numărul sutelor, iar la acesta adăugăm invariabil 25.

2. Pătratul numerelor formate cu cifra 9

Citiţi cu atenţie exemplele de mai jos ! Veţi deduce astfel modul în care se pot calcula pătratele acestei categorii de numere, fără calculator sau creion.

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9\,801$$
$$999^2 = 998\,001$$
$$9\,999^2 = 99\,980\,001$$

Notă : Se pot reţine uşor aceste pătrate, observînd că de la puterea a doua a lui 9($9^2=81$), între 8 şi 1 se intercalează succesiv cîte un zero şi în acelaşi timp, în faţa lui 8 apar un număr egal de cifre 9. Ca regulă generală, un număr format din n cifre de 9 la puterea a doua va fi format astfel : (n—1) cifre de 9, cifra 8, (n—1) cifre de zero şi cifra 1. Suma cifrelor va fi $9 \cdot n$, iar numărul lor $2 \cdot n$.

Încă un exemplu : $999\,999^2 = 999\,998\,000\,001$.

3. Pătratul numerelor formate cu cifra 1 [—]

Dau aceleaşi indicaţii ca mai sus : stabiliţi singuri regula de formare a acestor pătrate şi numai după aceea citiţi „nota“ !

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12\,321$$
$$1\,111^2 = 1\,234\,321$$
$$11\,111^2 = 123\,454\,321$$

Notă : Dacă numărul are *n* cifre (toate 1), pătratul său este egal cu un număr ale cărui cifre cresc consecutiv de la 1 la *n* şi apoi scad din nou pînă la 1. Numărul total al cifrelor va fi (2n—1). Astfel puterea a doua a unui număr format din 7 cifre de 1 va fi un număr format din $2 \cdot 7 - 1 = 13$ cifre (totdeauna fără soţ), avînd la mijloc cifra 7 şi scăzînd către stînga şi dreapta în mod simetric pînă la 1 ($1\,111\,111^2 = 1234567654321$).

Observaţi simetria faţă de cifra 7 din mijloc, sau modul de creştere şi descreştere de la 1 la 7 şi apoi la 1.

4. Înmulțirea cu 9 a primelor zece numere (sau extemporalul tînărului B) [—]

Extemporal : Scrieți înmulțirea primelor zece numere cu 9.

Faza I (tema)	Faza a 2-a (cunoștințele)	Faza a 3-a (numărarea greșelilor)	Faza a 4-a (idem)
1×9=	1×9=9	= 9	= 9 ↑
2×9=	2×9=	= 1	= 18
3×9=	3×9=	= 2	= 27
4×9=	4×9=	= 3	= 36
5×9=	5×9=	= 4	= 45
6×9=	6×9=	= 5	= 54
7×9=	7×9=	= 6	= 63
8×9=	8×9=	= 7	= 72
9×9=	9×9=	= 8 ↓	= 81
10×9=	10×9=90	= 90	= 90

În faza a 2-a, elevul nostru nu a știut decît ceea ce era foarte simplu : 1×9=9 și 10×9=90.

În faza a 3-a, a început să numeroteze cîte răspunsuri nu a putut da, astfel în dreptul lui 2×9 a pus 1, la 3×9 a pus 2 și tot așa în jos pînă la 9×9 unde a pus 8, dar a numărat și pe 9 (cifra zecilor de la 10×9), s-a încurcat, și a început să facă același lucru de jos în sus, numerotînd 1 ; 2 ; 3 etc. (urmăriți fazele 3 și 4 de mai sus).

Și surpriza s-a produs : micul nostru școlar a fost notat cu 10 (zece).

Trecînd peste această glumă culeasă de la școlarii noștrii, vă invit să observați atent același tablou al înmulțirii cu 9, scris ca mai jos :

9 × 1 = 09	9 × 10 = 90
9 × 2 = 18	9 × 9 = 81
9 × 3 = 27	9 × 8 = 72
9 × 4 = 36	9 × 7 = 63
9 × 5 = 45	9 × 6 = 54

Revedeți complet acest tablou ! Scrieți 9×1=09 (adică zero zeci și nouă unități) și după ce citiți prima coloană de sus în jos, continuați pe cea de a doua, de jos în sus.

Ce proprietăți observați că au numerele rezultate din aceste înmulțiri ? Puteți enunța cîteva ?

Rezultă o regulă practică pentru micii matematicieni, care au greutăți cu această înmulțire? De unde provin aceste proprietăți?

Pentru introducerea în subiect, va trebui să observați mai întîi că:

1. Cifrele zecilor cresc consecutiv de la 0; 1; 2; ... la 9.
2. Cifrele unităților descresc consecutiv, în același timp, de la 9 la 0.

Celelalte proprietăți, sînteți invitați să le găsiți singuri, verificîndu-vă cu răspunsul!

Răspuns:

Înmulțirea cu 9 a primelor zece numere are ca rezultat un număr, care îndeplinește următoarele condiții (în afara celor menționate în enunț):

a) — face parte din decada indicată de mărimea înmulțitorului.

b) — suma cifrelor este egală cu 9.

c) — pentru doi înmulțitori egal depărtați de extreme (1 și 10; 2 și 9; 3 și 8; 4 și 7; 5 și 6), rezultatele reprezintă numere formate din aceleași cifre, ocupînd diferit locul unităților și zecilor ($9 \times 3 = 27$; $9 \times 8 = 72$).

d) — rezultatul înmulțirii lui 9 cu un număr este egal cu acest număr înmulțit cu 10, minus numărul respectiv ($9 \times 7 = 70 - 7 = 63$).

e) — regulile practice sînt date la punctul d sau combinînd a și b. Astfel $9 \times 4 = 36$, adică scriem 3 (cifra dinaintea înmulțitorului 4) și adăugăm la unități o cifră care adunată cu 3 să facă 9.

Explicația acestor proprietăți rezultă ușor, dacă înmulțirea cu 9 o punem sub forma:

$$9 \times n = (10 - 1) \cdot n = 10 \cdot n - n.$$

5. Înmulțirea cu 9 a numerelor mai mari de 10 [—]

$9 \times 11 = 99$ $\qquad$ $9 \times 21 = 189$
$9 \times 12 = 108$ $\qquad$ $9 \times 22 = 198$
$9 \times 13 = 117$ $\qquad$ $9 \times 23 = 207$
. $\qquad$.
. $\qquad$.
. $\qquad$.
$9 \times 18 = 162$ $\qquad$ $9 \times 28 = 252$
$9 \times 19 = 171$ $\qquad$ $9 \times 29 = 261$
$9 \times 20 = 180$ $\qquad$ $9 \times 30 = 270$

Observați :

a) modul în care descresc cifrele unităților și în care cresc cifrele zecilor și sutelor ;

b) suma cifrelor este 9 sau 18, divizibile cu 9, lucru cunoscut de la divizibilitatea numerelor cu 9.

6. Înmulțirea manuală a numerelor de la 5 la 10 [—]

Procedee și exemple :

a) $7\times9=(5+2)(5+4)$

Ridicăm 2 degete la o mînă și 4 la cealaltă (diferența peste 5 pînă la 7 și respectiv 9). Suma lor : $2+4=6$ ne dă cifra zecilor (deci 60). Produsul dintre numărul degetelor rămase neridicate (3 la o mînă și 1 la cealaltă) $3\times1=3$ ne dă cifra unităților (deci 3). Rezultatul e cel cunoscut : $60+3=63$.

b) $6\times7=(5+1)(5+2)$

La mîna stîngă ridicăm 1 deget (diferența între 6 și 5), iar la dreapta 2 degete (diferența dintre 7 și 5). La prima mînă au rămas neridicate 4 degete, iar la a doua 3 degete.

Suma degetelor ridicate $1+2=3$ reprezintă cifra zecilor (deci 30), iar produsul dintre numerele degetelor strînse (lăsate) $4\times3=$ $=12$, ne dă unitățile (în acest caz 12 unități=1 zece+2 unități). Total $30+12=42$.

Explicația este următoarea :

$$7\times9=(5+2)(5+4)=5\cdot5+5\cdot4+2\cdot5+2\cdot4=$$

(adăugăm și scădem produsele care au un singur factor 5, adică pe $5\cdot4$ și pe $2\cdot5$ și egalitatea se menține).

$$=5\cdot5+5\cdot4+2\cdot5+2\cdot4+5\cdot4+2\cdot5-5\cdot4-2\cdot5=$$

(grupăm termenii asemenea $5\cdot4$ și $2\cdot5$ și la ceilalți dăm factor comun 5 și -2).

$$=2\cdot5\cdot4+2\cdot2\cdot5+5(5-4)-2(5-4)=$$
$$=10\cdot4+10\cdot2+(5-4)(5-2)=$$
$$=10(4+2)+1\cdot3=60+3=63$$

$4+2=6$ reprezintă numărul degetelor ridicate, deci numărul zecilor ; $1\times3=3$ reprezintă produsul dintre numerele degetelor neridicate, deci unitățile.

Observații : Avantajul procedeului este acela că trebuie cunoscută numai înmulțirea numerelor pînă la 5 și poate fi folosit cu ușurință de micii școlari.

Încă un exemplu :

c) 8×5

Ridicăm 3 degete la stînga și nici unul la dreapta (zero)

3+0=3 ; deci treizeci (30)

Au rămas neridicate 2 și 5, deci 2×5=10. Rezultatul înmulțirii este 30+10=40.

7. Înmulțirea cu numere formate numai din cifra 1

a) Înmulțirea unui număr cu 1 ne dă evident numărul respectiv.

b) Înmulțirea cu 11 (în afara procedeului obișnuit).

Ex. : 3 8 0 9 7 0 9 4 × 1 1

4 1 9 0 6 8 0 3 4

S-a procedat astfel : am coborît pe 4 (ultima cifră), am adunat pe 4 cu 9 ne-a dat 13, am scris la rezultat 3, am ținut 1, pe care l-am adunat cu 9 și cu zero, a rezultat 10, am scris la rezultat 0, am ținut 1 pe care l-am adunat cu zero și cu 7, rezultatul 8 l-am trecut jos, am adunat pe 7 cu 9 etc. Deci, a fost o adunare succesivă în care fiecare cifră a deînmulțitului am luat-o de două ori. Atenție la ultimele operații din partea stîngă ! Și aici 1+0+ +8=9 (l-am scris jos), 8+3=11 am scris la rezultat 1, am ținut 1 pe care l-am adunat cu 3 și a dat 4. Bifați eventual fiecare cifră a deînmulțitului pentru a controla că ați întrebuințat-o de două ori !

Luați un exercițiu mai simplu 7 4 8 × 11

8 2 2 8

c) Înmulțirea cu 111.

Se aplică același procedeu, cu diferența că fiecare cifră a deînmulțitului trebuie luată în calcul de trei ori.

Ex. : 5 3 7 4 × 111

5 9 6 5 1 4

Am procedat astfel (în paranteză, prin virgule, arătăm de cîte ori luăm cifra respectivă) : Am coborît pe 4 ('), am adunat pe 4 ('') cu 7(') a dat 11, am trecut la rezultat 1, am ținut 1 pe care l-am

adunat cu 4 (''') pentru a treia și ultima oară , cu 7 ('') și cu 3 (') a dat 15, am trecut jos 5, am ținut 1 adunat cu 7 ('''), cu 3 ('') și cu 5 (') a dat 16, am scris 6, am ținut 1 pe care l-am adunat cu 3 (''') și cu 5 ('') a dat 9 (l-am trecut jos) și nereținînd nimic l-am luat pe 5 (''') pentru a treia oară și l-am trecut la rezultat.

d) Încercați singuri înmulțirea cu 1 111 (veți întrebuința de cîte patru ori fiecare cifră a deînmulțitului pe care îl veți alege !).

8. Suma numerelor naturale de la 1 la 99 [—]

În cazul în care cunoașteți formula care dă suma unei progresii aritmetice, problema e ușoară $\left(S=\frac{1+99}{2}\cdot 99=4\,950\right)$.

Prezenta temă vă cere să rezolvați, fără această formulă, grupînd convenabil numerele ce trebuie adunate.

Răspuns :

Ordonăm astfel numerele de adunat :

1	+	99	=	100
2	+	98	=	100
3	+	97	=	100
4	+	96	=	100
.				
.				
.				
48	+	52	=	100
49	+	51	=	100
		50	≡	50

Se observă că pe prima coloană numerele cresc de sus în jos de la 1 la 49, lăsăm 50 stingher, iar pe coloana a doua am adunat restul numerelor care cresc de jos în sus (de la 51 la 99).

Suma fiecărui rînd este 100. Sînt 49 de rînduri (sume de două numere), deci vom avea $49\times100=4\,900$, la care adăugind 50 (lăsat singur), dăm peste rezultatul corect 4 950. Dacă ni se cere suma numerelor de la 1 la 100, la rezultatul anterior adăugăm 100 și ne dă 5 050.

9. Ce legătură găsiți între numerele din primul și al doilea rînd ?

a)	3	1	7	4	9
	9	1	49	16	81
b)	2	8	5	10	6
	7	67	28	103	39
c)	5	1	2	4	3
	125	1	8	64	27
d)	9	11	5	13	7
	61	101	5	149	29
e)	3	4	5	6	7
	27	37	47	57	67

Răspunsuri :

Rîndul al doilea reprezintă :

a) pătratul numerelor din primul rînd.

b) pătratul numerelor din primul rînd plus 3.

c) cubul primelor numere.

d) pătratul primelor numere minus 20.

e) numărul de sus s-a înmulțit cu 10 și din rezultat s-a scăzut 3.

10. Recunoașteți operațiile ?

Se dă mai jos un tablou de numere. În fiecare rînd numerele de pe coloanele 4, 5 și 6 sînt rezultate din numerele primelor **trei** coloane, cu ajutorul unor operații. Care sînt aceste operații ?

coloana	1	2	3	4	5	6
	1	1	36	36	38	34
	1	2	18	36	21	15
	1	3	12	36	16	8
	1	4	9	36	14	4
	1	6	6	36	13	—1
	2	2	9	36	13	5
	2	3	6	36	11	1
	3	3	4	36	10	—2

Răspuns :

Coloana a 4-a conţine numere rezultate din produsul numerelor din primele trei coloane.

Coloana a 5-a, din adunarea primelor trei coloane.

Coloana a 6-a, din scăderea primelor două coloane din a treia.

11. Înmulţirea „în gînd" a două numere, de ordinul zecilor [—]

A) Exemple : a) $13 \times 17 = 13(10+7) = 13 \cdot 10 + 13 \cdot 7 = 130 + 91 = 221$ Deci am înmulţit pe 13 cu 10, apoi pe 13 cu 7 şi le-am adunat.

b) $13 \times 17 = (10+3)(10+7) = 100 + 10(7+3) + 7 \cdot 3 = 100 + 100 + 21 = 221$

c) $24 \times 32 = 24(30+2) = 720 + 48 = 768$

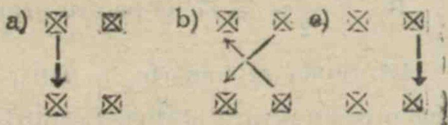
Sau alte descompuneri pe care le consideraţi mai simple !

Vă recomandăm însă o metodă, verificată la mai mulţi tineri, cu rezultate bune. Aşezaţi în memorie numerele unul sub altul :

32×

înmulţiţi după schema

42



Şi adunaţi rezultatele parţiale !

În cazul nostru $30 \times 40 = 1\,200$; $2 \times 30 = 60$ şi $2 \times 40 = 80$; $80 + 60 = 140$; $140 + 1200 = 1340$; apoi $2 \times 2 = 4$; $1340 + 4 = 1344$.

Poate vă convine ordinea b, c, şi apoi a.

După cîteva exerciţii, veţi putea uşor să renunţaţi la creion pentru astfel de operaţii.

B) Pătratul unui număr de două cifre.

Se aplică acelaşi procedeu, aici avînd avantajul că cifrele se reţin uşor, iar înmulţirea din faza b (în diagonală) se repetă. Putem schimba ordinea fazelor : b, c, a. Astfel :

72×	$2 \times 70 = 140$; $2 \times 140 = 280$; $280 + 2 \cdot 2 = 284$
72	Apoi $70 \times 70 = 4900$; $4900 + 284 = 5184$

Pentru pătratul numerelor cuprinse între 10 şi 20 se recomandă memorarea rezultatelor. Pătratul numerelor terminate cu zero nu ridică probleme ($30^2 = 900$), iar al celor terminate cu 5 s-a discutat la exerciţiul nr. 1 al acestui capitol.

12. Împărțirea unei cantități în două sau mai multe părți inegale

I. Împărțiți 40 lei la doi copii, astfel ca primul să aibă cu 6 lei mai mult decît al doilea.

II. Idem, dar cu 6 lei mai puțin decît al doilea.

III. Idem, astfel ca primul să aibă de trei ori mai mult decît al doilea.

IV. Împărțiți 500 lei în două părți, astfel ca o parte să fie cu 20 lei mai mare decît triplul celeilalte.

V. Idem, dar cu 20 lei mai mică decît triplul celeilalte.

VI. Încercați o formulă de generalizare pentru cazurile I—V.

Răspunsuri :

I. $\frac{40+6}{2}=23$ lei pentru primul copil ; $40-23=17$ lei pentru al doilea copil.

II. $\frac{40-6}{2}=17$ lei pentru primul copil ; 23 lei al doilea copil.

III. Suma se împarte în patru părți (trei părți primului copil, plus o parte pentru al doilea copil). Deci, $\frac{40}{4}\cdot 3=30$ lei și respectiv 10 lei.

IV. Idem ca mai sus, dar mai întîi scădem 20 lei.

$\frac{500-20}{4}=120$ lei prima parte și 380 lei a doua parte.

V. Idem ca mai sus, dar mai întîi adunăm 20 lei.

$\frac{500+20}{4}=130$ lei și respectiv 370 lei.

VI. $S_1=\frac{S\pm x}{n+1}$ unde :

S_1 = valoarea unei părți ; S = valoarea totală ; x = valoarea cu care o parte este mai mare sau mai mică decît cealaltă, sau multiplul celeilalte.

n = de cîte ori este mai mare o parte decît cealaltă.

Evident $S_2=S-S_1$

Observaţii :

1) Pentru cazurile I şi II, cele două părţi sînt diferenţiate prin operaţiuni de ordinul I (adunare sau scădere, adică mai mare sau mai mic cu 6 lei, deci $x=6$) ; în aceste cazuri $n=1$, în formula generală.

2) În cazul III o parte este de trei ori mai mare decît cealaltă, deci $n = 3$.

3) Cazurile IV şi V reprezintă combinaţii ale cazurilor I, sau II cu III.

13. Împărţirea cu numere formate din cifra 9

Exemple :

$$\frac{1}{9}=0{,}111...=0{,}(1)$$

$$\frac{1}{99}=0{,}010101...=0{,}(01)$$

$$\frac{1}{999}=0{,}001001001001...=0{,}(001)$$

$$\frac{2}{9}=0{,}222...=0{,}(2)$$

$$\frac{2}{99}=0{,}0202...=0{,}(02)$$

$$\frac{7}{9}=0{,}7777...=0{,}(7)$$

$$\frac{77}{99999}=0{,}0007700077=0{,}(00077)$$

Ce observaţii puteţi face pe baza exemplelor de mai sus ? Stabiliţi regula generală de împărţire a unor numere formate din aceeaşi cifră, cu numere formate numai din cifra 9.

Răspuns :

a) Împărţirile de acest gen au ca rezultat fracţii zecimale periodice simple.

b) Perioada are atîtea cifre cîte cifre are numitorul, și este formată astfel: ultimele cifre (poziții) de la dreapta la stînga sînt ocupate de numărător, iar celelalte se completează cu zero.

14. Putere la putere

Puterea n a unei baze x este x^n, adică x (baza) de înmulțit cu el însuși de n ori. De exemplu, $2^3=2 \cdot 2 \cdot 2=8$.

Puterea unei baze la o putere are forma x^{n^m} și se calculează ridicînd baza x la puterea rezultată din produsul exponenților n și m, deci $X^{n^m}=X^{n \cdot m}$

După această scurtă rememorare a teoriei, urmăriți următorul exemplu: 2^{2^3}

— varianta 1 : $2^{2^3}=2^6=64$ (am înmulțit puterile $2 \cdot 3=6$).

— varianta 2 : $2^{2^3}=4^3=64$ (am ridicat mai întîi baza la puterea 2).

— varianta 3 : $2^{2^3}=2^8=256$ (am ridicat mai întîi puterea 2 la cub).

Se vede că rezultatele din variantele 1 și 2 sînt identice, dar diferite de cel din varianta 3.

Puteți lua și alte exemple și, procedînd ca mai sus, veți obține, de asemenea, rezultate diferite.

Care din cele două categorii de variante este corectă?

Răspuns:

Fără îndoială, aici este vorba de o curiozitate matematică, iar exercițiul are rostul de a evidenția calculul corect (cel din varianta întîi, identic cu cel din varianta 2) și de a evita calculul din varianta 3, pe care — uneori, unii dintre noi — sîntem tentați să-l aplicăm, fie din neglijență, fie din necunoașterea corectă a modului de calcul.

Revenind la problemă, e posibil ca astfel de cazuri să fie diferențiate între ele — dacă situația o impune — cu ajutorul parantezelor, astfel:

$$(2^2)^3=2^{2^3}=4^3=2^6=64 \text{ (variantele 1 și 2).}$$

$$2^{(2^3)}=2^8=256 \text{ (varianta 3).}$$

Trecînd peste curiozitatea subliniată de problema noastră, reținem calculul corect, după regula cunoscută:

$$X^{n^m}=X^{n \cdot m}$$

$$2^{2^3}=2^6=64$$

Notă: Amintim că în manualele de specialitate, se dă următoarea justificare a modului corect de calcul (ne vom referi la exemplul din problema noastră) :

$$[(2)^2]^3=(2)^2 \cdot (2)^2 \cdot (2)^2=(2)^{2+2+2}=2^6=64$$

15. Cea mai mare valoare posibilă, folosind — pentru scriere și operații — aceeași cifră de trei ori

a) Luați cifra 2, folosiți-o de trei ori, formînd numere legate între ele prin diverse operații, astfel încît să obțineți cea mai mare valoare posibilă.

Exemple : $2 \cdot 2 \cdot 2$, sau $(2 \cdot 2)^2$, sau 22^2, sau 2^{22} etc.

Observație: Este ușor de văzut că nu veți apela la operațiuni de ordinul I (adunare și scădere) și nici la acelea de împărțire sau extragere de radical, deoarece vă conduc la valori mai mici decît operațiunile de înmulțire, sau ridicare la puteri.

b) Același lucru pentru cifra 3 ; 4 ; 9 sau oricare altă cifră doriți.

c) Aceeași problemă folosind numărul 10 de trei ori.

Ca elemente ajutătoare :

— revedeți răspunsul de la exercițiul anterior ;

— puterea unui produs a mai multor baze este egală cu produsul puterilor acelor baze.

$$(a \cdot b)^n=a^n \cdot b^n$$

Apelați la răspunsul de mai jos, numai după ce v-ați fixat singuri asupra unor soluții.

Răspunsuri :

a) 2^{22} [mai mare decît $(2)^{2^2}=2^4$; sau decît $2^{(2^2)}=2^4=4^2$; sau decît 22^2 etc.].

b) 3^{33} [mai mare decît $3^{(3^3)}=3^{27}$; sau decît $(3^3)^3=3^9=27^3$ etc.].

$4^{(4^4)}=4^{256}>4^{44}$; sau decît $(4^4)^4=4^{16}=256^4$ etc.

$9^{(9^9)}=9^{387 . 420 . 489} \gg 9^{99}$; sau decît $(9^9)^9=9^{81}$ etc.

Se vede de aici că diferența între cele două moduri de rezolvare a problemei (n^{nn} sau n^{n^n}) apare între cifrele 3 și 4.

Pentru cifra 1, valoarea maximă se obține scriind 111 (numărul de ordinul III).

c) $10^{(10^{10})} = 10^{10000000000}$ adică un număr format din cifra 1 urmată de zece miliarde de zerouri. Pentru scrierea acestui număr cu un ritm de două cifre pe secundă, ar fi nevoie de cca. 159 de ani (un an are 31 556 925 secunde, iar o zi 86 400 secunde). Evident $10^{(10^{10})} \gg (10^{10})^{10}$, deoarece $(10^{10})^{10}=10^{100}$ este un număr format din cifra 1 urmată numai de o sută zerouri.

16. Operații cu două numere [—]

I. Spuneți ce obțineți dacă înmulțiți : a) două numere supraunitare, b) două echiunitare, c) două subunitare, d) unul supraunitar cu unul subunitar ?

II. Idem dacă ridicați la o putere supraunitară : a) un număr supraunitar ; b) unul subunitar ?

III. Idem dacă împărțiți : a) două numere supraunitare, b) două subunitare, c) unul supraunitar cu unul subunitar, d) unul subunitar cu unul supraunitar.

Răspunsuri :

I. a) un număr supraunitar mai mare decît fiecare dintre ele.
b) 1
c) un număr mai mic decît fiecare dintre ele.
d) unul mai mic decît cel supraunitar și mai mare decît cel subunitar.

II. a) un număr mai mare decît el, b) un număr mai mic.

III. a) un număr mai mic decît deîmpărțitul, b) un număr mai mare decît deîmpărțitul, c) un număr mai mare decît deîmpărțitul d) un număr mai mic decît deîmpărțitul.

17. Diferența între două numere de ordinul sutelor, avînd aceleași cifre, dar cu ordinea inversată, prima și ultima cifră fiind diferite între ele

Să luăm, de exemplu, numărul 741. Numărul cu cifrele scrise în ordine inversă este evident 147. Fie diferența lor (cel mai mic din cel mai mare).

$$741-147=594$$

Adunăm rezultatul diferenței 594, cu numărul format prin inversarea ordinei cifrelor 495 și vom obține invariabil $594+495=$ $=1\,089$.

Să luăm un alt exemplu : 397, cu corespondentul său (cifrele scrise în ordinea inversă) 793

793—397=396

396+693=1 089 (verifică !)

Luaţi oricare alt exemplu, procedaţi ca mai sus şi veţi obţine totdeauna acelaşi rezultat, adică 1 089.

Şi acum, baza teoretică a procedeului de mai sus, poate fi redată de elevii claselor mai mari. Ca element ajutător, vă amintesc că un număr de trei cifre $\overline{xyz}$, se scrie :

$$100x+10y+z$$

Răspuns :

Numărul cu ordinea cifrelor inversată va fi $\overline{zyx}$, adică $100z+10y+x$ (Se aminteşte condiţia $x \neq z$; în caz contrar, diferenţa ar fi nulă, căci numerele ar fi egale).

Scădem cele două numere şi facem ipoteza $x > z$, care nu schimbă raţionamentul de mai jos :

$$100x+10y+z-(100z+10y+x)=100x+10y+z-100z-10y-x=$$
$$=100(x-z)+z-x.$$

Pentru a evidenţia ordinul zecilor, adăugăm şi scădem 100. Vom avea :

$$N=\underbrace{100(x-z-1)}_{\text{ordinul 3 (sute)}}+\underbrace{10\cdot 9}_{\text{ordin 2 (zeci)}}+\underbrace{10+z-x}_{\text{ordin 1 (unităţi)}}$$

Numărul cu ordinea cifrelor inversată îl notăm Ni şi va fi :

$$Ni=100(10+z-x)+10\cdot 9+x-z-1$$
$$N+Ni=1\,089 \text{ (Verificaţi !)}$$

Notă : termenii $10+z-x$ reprezintă unităţile, deoarece am convenit $x > z$

Observaţie : dacă scădem numărul mai mare din cel mai mic (în demonstraţia de mai sus $x < z$), rezultatul va fi un număr negativ, care adunat cu numărul avînd ordinea inversă a cifrelor (tot negativ), vom obţine acelaşi rezultat, dar cu semnul minus.

Exemplu :

597—795=—198

—198—891=—1 089 (verifică !)

18. Operaţiuni remarcabile prin rezultatele lor [—]

a) Suma primelor numere naturale consecutive şi suma cuburilor lor :

$1+2=3$	$1^3+2^3=3^2$
$1+2+3=6$	$1^3+2^3+3^3=6^2$
$1+2+3+4=10$	$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$
$1+2+3+4+5=15$	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2$
$1+2+3+4+...n=\frac{1+n}{2}n$	$1^3+2^3+3^3+...n^3=\left(\frac{1+n}{2}n\right)^2$

Regula practică rezultă uşor : dacă suma primelor n numere naturale este $\frac{1+n}{2}n$, atunci suma cuburilor acestor numere este pătratul acelei sume $\left(\frac{1+n}{2}n\right)^2$

b)

$777\times143=111\,111$	$777\times\ 858=\ 666\,666$
$777\times286=222\,222$	$777\times1\,001=\ 777\,777$
$777\times429=333\,333$	$777\times1\,144=\ 888\,888$
$777\times572=444\,444$	$777\times1\,287=\ 999\,999$
$777\times715=555\,555$	$777\times1\,430=1\,111\,110$

Rezultatele remarcabile de mai sus se explică prin faptul că $777\times143=111\times7\times143=111\times1\,001=111\,111$.

Restul operaţiunilor au ca înmulţitori multipli de 143, astfel : $286=2\times143$; $429=3\times143$ ş.a.m.d.

Deci rezultatele vor fi : $2\times111\,111=222\,222$; $3\times111\,111=333\,333$ etc.

Înmulţirea cu $1\,430=10\times143$, adaugă un zero la primul rezultat şi deci nu mai respectă regula de a obţine numere formate din aceleaşi cifre.

NUMERE PITAGOREICE

În diverse probleme de geometrie se dau dimensiunile laturilor unui triunghi, care — fără să se arate în text, sau să se poată observa ușor — respectă teorema lui Pitagora (triunghi dreptunghic).

În situația în care rezolvitorii nu sesisează acest «amănunt», lucrurile se complică, avînd drept urmare pierderea unui timp prețios. Pentru a evita astfel de situații (și nu numai pentru aceasta !) e necesar să cunoaștem — în măsura posibilității — unele categorii de numere pitagoreice, sau cel puțin să ne familiarizăm cu ele.

În acest scop, în continuare, ne vom ocupa de asemenea numere.

19. Pătratul unui număr impar egal cu suma a două pătrate (I)

Găsiți un număr par, care ridicat la pătrat și adunat cu pătratul unui număr impar mai mic decît el (cunoscut, diferit de unu), să facă pătratul numărului imediat superior numărului par. Veți afla astfel o categorie de numere pitagoreice !

Pentru înțelegerea mai corectă a textului, dăm mai jos relația generală, în care :

$(2x+1)$ este numărul impar considerat cunoscut, mai mare decît 1 (de exemplu 3 ; 5 ; 7 etc.).

$2y$ este numărul par care trebuie aflat, mai mare decît numărul impar ($2y > 2x+1$) ;

$(2y+1)$ este numărul imediat superior lui $2y$.

Vom lucra numai cu numere naturale, deci :

$$x \in N; \quad y \in N$$

Relația este :

(1) $(2x+1)^2+(2y)^2=(2y+1)^2$

Rezolvați-o și exemplificați pentru primele numere impare !

($x=1 \rightarrow 2x+1=3$; $x=2 \rightarrow 2x+1=5$ etc.).

Răspuns :

(1) $(2x+1)^2+(2y)^2=(2y+1)^2$

$4x^2+4x+1+4y^2=4y^2+4y+1$ Reducînd termenii asemenea, rezultă regula :

$4x^2+4x=4y \quad | : 4$

$x^2+x=y$

(2) $x(x+1)=y$

Dacă $2x+1$ e numărul impar cunoscut, celelalte două numere — în funcție de x — vor fi, conform relației (2) :

(3) $2y=2x(x+1)$

(4) $2y+1=2x(x+1)+1$

Înlocuind (3) și (4) în relația (1), avem verificarea respectivă.

Din relațiile (2), (3), (4) rezultă următorul tablou de numere pitagoreice :

pentru $x=1$; $y=2$ avem înlocuind în relația (1) $3^2+4^2=5^2$
$x=2$; $y=6$ avem înlocuind în relația (1) $5^2+12^2=13^2$
$x=3$; $y=12$ avem înlocuind în relația (1) $7^2+24^2=25^2$
$x=4$; $y=20$ avem înlocuind în relația (1) $9^2+40^2=41^2$

Deci numerele pitagoreice din această categorie sînt :

3,	4,	5
5,	12,	13
7,	24,	25
9,	40,	41
11,	60,	61
etc.		

Regula practică, de a determina numerele pitagoreice de pe un rînd, cînd le cunoaștem pe cele din rîndul anterior, rezultă imediat :

— primul număr (cel de pe coloana întîi) reprezintă numerele impare în ordine crescătoare, începînd cu 3 (se elimină doar 1) ;

— numărul de pe coloana doua, situat pe rîndul orizontal n, este egal cu cel de deasupra lui plus $n \times 4$. De exemplu pentru rîndul 2 avem $4+2\times4=12$; pentru rîndul 3 avem $12+3\times4=24$; pentru rîndul 4 avem $24+4\times4=40$; pentru rîndul 6 avem $60+6\times4=84$ etc. Atenție însă cînd stabiliți numărul de ordine al rîndului ! El este egal cu numărul impar de pe coloana întîi, minus unu și împărțit la doi. De exemplu dacă numărul impar de pe coloana întîi este 9, atunci el se află pe rîndul 4, deoarece

$$\frac{9-1}{2}=4 ;$$

— numărul de pe coloana treia este egal cu cel de pe coloana doua plus 1.

Observații :

1) Regula este valabilă și pentru numere negative (exceptînd, de asemenea, pe —1), deoarece pătratele lor sînt tot numere pozitive).

2) Faceți cîteva exerciții de determinare a trei numere pitagoreice, pornind de la un număr impar mai mare **ca 1**.

Exemplu : alegem numărul impar 11.

a) Calculul pe baza formulelor stabilite mai sus.

$2x+1=11$ rezultînd imediat $x\equiv5$;

$2y=2x(x+1)=60$

Deci, numerele pitagoreice sînt 11 ; 60 ; 61

b) Calculul pe baza completării tabelului redat mai sus.

Se adună la 40 (numărul precedent de pe coloana doua) produsul $5\times4=20$ și rezultă 60. În acest produs, 5 reprezintă numărul de ordine al rîndului stabilit ca mai sus, iar 4 este numărul de pe primul rînd, coloana doua.

20. Tot problema precedentă (II) [—]

Reluăm tabelul numerelor pitagoreice de acest tip, stabilit anterior.

Rn	C1	C2	C3
1)	3	4	5
2)	5	12	13
3)	7	24	25
4)	9	40	41
5)	11	60	61
6)	13	(84)	(85)
7)	15	(112)	(113)
8)	17		
9)	19		
10)	21	(220)	(221)

Temă : Stabiliți o regulă mai directă prin care dîndu-se un număr impar oarecare (exclusiv 1) — cele din prima coloană — să puteți determina cu ușurință numerele din coloana a 2-a.

Ați reținut că cele din coloana a 3-a se obțin adunînd 1 la cele din coloana a 2-a. Deci, numerele din coloana 1 și a 3-a nu ridică nici o problemă, ci doar cele din coloana a 2-a.

Ca indicație, acestea din urmă sînt funcție și de numerele impare din prima coloană. (Anterior stabilisem modul de determinare a lor, funcție de primul număr din coloana C2 — numărul 4).

Răspuns :

Notăm numerele din coloanele 1, 2, 3 cu C1, C2 și respectiv C3 (ca în tablou).

Se observă că 4 (din C2)$=1\times3+1=1(3+1)=1\times4$

La fel : $12=2\times5+2=2(5+1)=2\times6$

$24=3\times7+3=3(7+1)=3\times8$

Dacă notăm cu Rn numărul de ordine al rîndurilor orizontale $\left(R1=1 \text{ pt. } C1=3\ ;\ R2=2 \text{ pt. } C1=5\ ;\ Rn=\dfrac{C1-1}{2}\right)$ observăm că numerele căutate de pe coloana C2 se obțin înmulțind numărul impar de pe coloana C1 cu Rn (nr. de ordine al rîndurilor orizontale) și adunînd tot pe Rn. Deci :

$$(1)\quad C2=C1\times Rn+Rn=Rn(C1+1)$$

Sau C2 este egal cu numărul de ordine al rîndului, de înmulțit cu numărul din coloana C1 plus 1. Iar $C3=C2+1$.

Pentru verificare vom completa rîndul 6

Pentru rîndul 6 avem $Rn=6$ și $C1=13$

$C2=Rn(C1+1)=6(13+1)=6\times14=84$

Iar $C3=84+1=85$

Deci, numerele pitagoreice din acest rînd vor fi :

$C1=13$; $C2=84$; $C3=85$. Adică va trebui să avem $13^2+84^2=85^2$. Verificați exactitatea !

Pentru rîndul 7 sau. 10, rezolvați singuri (rezultatele corecte le-am trecut în tabel în paranteze). Dar rețineți $Rn=\dfrac{C1-1}{2}$;

de unde $C1=2Rn+1$

Temă : Stabiliți formulele (1) și (2) care ne dau pe C2 și respectiv C3, pentru numerele întregi, impare, negative ($C1 < -1$) (Deși nu ați uitat că teorema lui Pitagora se aplică la un triunghi dreptunghic, în care laturile sînt mărimi pozitive !)

Răspuns :

(1) $C2=C1\times Rn-Rn=Rn(C1-1)$

(2) $C3=C2-1$

Exemplu :
pentru rîndul 4 (Rn=4), în tabel se consideră : C1=—9.
Avem C2=4(—9—1)=—40
C3=—40—1=—41

Regăsim aceleași numere din tablou, cu semne schimbate, care, ridicate la pătrat, devin pozitive și deci satisfac relația lui Pitagora.

21. Altă serie de numere pitagoreice (III)

Dăm mai jos un asemenea tablou, care cuprinde și o parte din numerele analizate anterior.

Rn	C1	C2	C3
1)	3	4	5
2)	6	8	10
3)	9	12	15
4)	12	16	20
5)	15	20	25
6)	18	24	30
7)	21	28	35
8)	24	32	40
9)	27	36	45

Observați că pe coloana C1 apar și numere pare. La fel pe coloana C3, iar pe coloana C2 se mențin numai numere pare.
Verificați-le prin sondaj și veți vedea că, într-adevăr

$$C1^2+C2^2=C3^2$$

Problema care se ridică este aceea de a găsi regulile de formare ale acestei serii de numere pitagoreice și să stabiliți expresia care generalizează aceste reguli.

Răspuns :

Se vede ușor că pe coloana 1-a avem multiplii lui 3, deci C1=n 3 (n ∈ N), pe coloana 2-a avem multiplii lui 4 deci C2==n 4, iar pe coloana 3-a multiplii lui 5, deci C3=n·5.

În acest caz, va trebui ca :

$$C1^2+C2^2=C3^2$$
$$(n \cdot 3)^2+(n \cdot 4)^2=(n \cdot 5)^2$$
$$9n^2+16n^2=25n^2$$
$$25n^2=25n^2$$

Regula practică rezultă ușor : avînd un număr multiplu de 3, vom calcula același multiplu a lui 4 și a lui 5 și vom afla trei numere care satisfac relația lui Pitagora.

Exemplu :

Avem numărul $33=11\times3$ (multiplul este 11)

Calculăm $11\times4=44$

și $11\times5=55$

Putem afirma că numerele 33 ; 44 și 55 satisfac teorema lui Pitagora. Evident : suma pătratelor celor două numere mai mici este egală cu părtatul celui de al treilea (cel mai mare) !

$$33^2+44^2=55^2$$
$$1\,089+1\,936=3\,025$$

Observați în plus că $C_2=C_1+Rn$

$$C_3=C_2+Rn=C_1+2Rn$$

22. Diferența a două pătrate — avînd ca baze două numere consecutive — este în unele cazuri un pătrat (IV)

Problema derivă din aceea tratată anterior (II), în care numărul de pe coloana 3 (C3) se obținea din cel de pe coloana 2 (C2) plus 1. Adică $C3=C2+1$.

Cum am văzut : $C1^2+C2^2=C3^2$

Vom putea scrie conform enunțului $C3^2-C2^2=C1^2$

Dv. trebuie să găsiți formula generală care satisface textul problemei sub forma aceasta !

Răspuns :

Două numere consecutive scrise sub forma generală sînt :

$$(n+1) \text{ și } n$$

Diferenţa pătratelor lor va fi :

$$(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$$

Adică : $(n+1)^2-n^2=2n+1$

Pentru a satisface condiţiile din text este necesar ca $2n+1$ să fie şi el un pătrat ! Pentru aceasta va trebui ca n să ia valori convenabile.

Exemplu : pt. $n=4$; $2n+1=9=3^2$; $n+1=5$

Deci numerele sînt 3 ; 4 ; 5.

pt. $n=12$; $2n+1=25=5^2$; $n+1=13$

Deci numerele sînt : 5 ; 12 ; 13

Regăsim tabloul de la problema 20 (II).

23. O împărţire cu resturi

Găsiţi un număr (cel mai mic posibil) care împărţit la 10, 9, 8... ...2, să dea respectiv următoarele resturi : 9, 8, 7...1.

Indicaţii : Notaţi cu x numărul căutat. El trebuie să se împartă la 10 şi să dea rest 9, adică $x=10 \cdot n_1+9=10n_1+9+1-1=10n_1+$ $+10-1=10(n_1+1)-1$ (unde $n_1 \in N$).

Prin acelaşi raţionament găsim, conform textului :

$$x=9(n_2+1)-1$$
$$x=8(n_3+1)-1$$
$$\vdots$$
$$x=3(n_8+1)-1$$
$$x=2(n_9+1)-1$$

Dacă în egalităţile de mai sus treceţi — 1 în stînga, veţi putea afla numărul cerut.

Răspuns :

$x+1=10 \cdot (n_1+1)$

$x+1=9 \cdot (n_2+1)$

$x+1=8 \cdot (n_3+1)$

$x+1=7 \cdot (n_4+1)$

$\vdots$

$x+1=2 \cdot (n_9+1)$

Observăm că $x+1$ se compune din produşi de cîte doi factori $10 \cdot (n_1+1)$; $9 \cdot (n_2+1)$ etc. Or un produs de mai mulţi factori e di-

..zibil cu un număr, atunci cînd cel puțin unul din factori e divizibil cu acel număr. În cazul nostru 10, 9, 8...2 sînt în același timp și factori din seria de produse care ne dau pe $x+1$ și divizorii impuși prin enunțul problemei. Deci $x+1$ va fi un număr care trebuie să se împartă cu 10, 9, 8...2 și acesta nu este altul decît cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al acestor numere.

Știți cum se află ? Se descompun numerele respective în factori primi, iar c.m.m.m.c. este produsul acestor factori luați o singură dată, cu exponentul cel mai mare pe care fiecare îl are în această descompunere. Acesta este $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520$.

Deci $x+1=2\,520$, iar $x=2\,519$.

24. Diferența între numere cu cifre consecutive descrescătoare și crescătoare

Diferența între un număr cu cifrele în ordine descrescătoare și unul cu aceleași cifre în ordine crescătoare este totdeauna o constantă. Astfel :

1) Cînd numărul e format din două cifre, diferența este 9 ;
Exemple : 98—89=9 ; 21—12=9 ; 76—67=9 etc.
2) Cînd numărul e format din trei cifre, diferența este 198 ;
Exemple : 987—789=198 ; 321—123=198 ; 654—456=198 etc.
3) Cînd numărul e format din patru cifre, diferența este 3 087 ;
Exemple : 9 876—6 789=3 087 ; 5 432—2 345=3 087, etc.
4) Cînd numărul e format din cinci cifre, diferența este 41 976 ;
Exemple : 98 765—56 789=41 976 ; 54 321—12 345=41 976 etc.
5) Cînd numărul e format din șase cifre, diferența este 530 865 ;
Exemple : 987 654—456 789=530 865 ; 765 432—234 567= 530 865 etc.

Să luăm în considerare și cazurile extreme :

a) cel în care numărul e format dintr-o singură cifră, la care diferența este evident zero (numărul scris cu cifre în ordine inversă fiind el însuși) !

b) Cel format din zece cifre, la care diferența este de asemenea unică (9 753 086 421).

Observație : Toate diferențele arătate mai sus sînt divizibile cu 9

Dv. vă revine sarcina să demonstrați cazul general pentru numerele formate din patru cifre. Pentru verificare vi se dă acest răspuns:

Răspuns :

Pentru cazul 3, numere formate din patru cifre (de ordinul miilor) !

Aici, numerele nu vor mai fi de forma $\overline{x\ y\ z\ v}$, ci vom ține seama că cifrele sînt consecutive (descrescătoare sau crescătoare) ! În acest caz, o singură necunoscută X este suficientă pentru a scrie cele două numere.

Numărul cu cifre descrescătoare $\overline{x\quad x-1\quad x-2\quad x-3}$;
Numărul cu cifre crescătoare $\overline{x-3\quad x-2\quad x-1\quad x}$;
Diferența lor este :

$$1\,000x+100(x-1)+10(x-2)+(x-3)-1\,000(x-3)-$$
$$-100(x-2)-10(x-1)-x=3\,087.$$

Pentru toate celelalte cazuri veți proceda în același mod și veți găsi rezultatele menționate în text.

25. Să se determine necunoscutele din relația de mai jos [+]

$$x\cdot\overline{xy}=\overline{zzz}$$

Se dau numerele x și $\overline{xy}$. Produsul $x\cdot\overline{xy}$ este un număr de ordinul sutelor, format din aceeași cifră. Să se afle aceste numere $x\,;\,y\,;\,z\ \in\{1\,;\,2\div 9\}$, adică sînt numere formate din cifre diferite de zero.

Indicații : — Produsul $x\cdot\overline{xy}$ se pune sub forma $x\cdot(10x+y)$.
— Rezultatul va fi de forma $\overline{zzz}$,
iar în calcule $100z+10z+z$

Răspuns :

(1) $x\cdot\overline{xy}=\overline{zzz}$

(2) $x(10x+y)=100z+10z+z$

(3) $10x^2+x\cdot y=100z+10z+z=111z$ (aici $x\cdot y$ e produsul a două numere formate dintr-o cifră).

Avem o ecuație cu trei necunoscute !

Vom identifica termenii din stînga egalității, cu cei din dreapta, grupînd convenabil :

— ipoteza I $\begin{cases}10x^2=100z\\ x\cdot y=11z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2=10z\\ x\cdot y=11z\end{cases}$

Deoarece $z \in (1 \div 9)$, iar $x \in (1 \div 9)$ singurul pătrat perfect $10z$ (deci un număr terminat cu zero) este 100 ; adică $10z=100 \Rightarrow$ $\Rightarrow z=10$; $x^2=100 \Rightarrow x=10$.

Aceste soluţii nu convin problemei !

— ipoteza II $\begin{cases} 10x^2=110z \\ x \cdot y=z \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=11z \\ x \cdot y=z \end{cases}$ (Numai $z=11$ ne dă un pătrat)

De asemenea, soluţiile : $z=11$, $x=11$ nu convin condiţiilor din problemă.

— ipoteza III. Adăugăm şi scădem 10 în stînga egalităţii (3).

$$10x^2+10+xy-10=100z+11z$$

Acum identificăm astfel :

$$\begin{cases} 10x^2+10=100z \\ x \cdot y-10=11z \end{cases} \Bigg| :10 \quad \begin{cases} x^2+1=10z \\ x \cdot y-10=11z \end{cases}$$

Din ec. $x^2+1=10z \Rightarrow x=\sqrt{10z-1}$

(considerăm $x>0$, deci radicalul pozitiv !)

Pentru ca $\sqrt{10z-1}$ (radicalul dintr-un număr multiplu de 10 minus 1) să fie un număr întreg, este necesar ca :

a) $10z-1=10 \cdot 5-1=50-1=49 \Rightarrow z=5$; $x=7$;

iar din relaţia (3)

$$y=\frac{111z-10x^2}{x}=\frac{555-490}{7}=\frac{65}{7}$$

(y nu e un număr întreg format dintr-o cifră, deci soluţia nu convine !)

b) $10z-1=10 \cdot 1-1=9 \Rightarrow z=1$; $x=3$

din relaţia (3) $y=\dfrac{111z-10x^2}{x}=\dfrac{111-90}{3}=\dfrac{21}{3}=7$

Deci, soluţia este :

$$x=3$$
$$y=7$$
$$z=1$$

Refacem înmulţirea dată prin text :

$$x \cdot \overline{xy}=\overline{zzz}$$

$3 \cdot 37=111$ (ceea ce este corect !)

26. O ecuație de gradul I cu patru necunoscute [+]

Vi se dă ecuația de mai jos :

$$5v+25x+125y+625z=970$$

După cum se vede, este o ecuație de gradul I cu patru necunoscute, iar pentru rezolvarea ei, va trebui să dăm valori arbitrare pentru trei necunoscute și vom afla valorile celei de a patra necunoscute. Este deci o ecuație, cu o mulțime infinită de soluții.

Ecuația are totuși și un rînd de soluții determinate.

Încercați o astfel de rezolvare !

Răspuns :

(1) $5v+25x+125y+625z=970$

Simplificăm cu 5

(2) $v+5x+25y+125z=194$

(3) $v+5x+25y+125z=190+4$

Se observă că termenii $5x$; $25y$; $125z$ sînt divizibili cu 5, deci și suma lor, ceea ce înseamnă că v trebuie să fie egal cu restul împărțirii cu 5 a termenului liber din dreapta egalității, adică cu 4 ; acest lucru a fost evidențiat în ecuația (3). Deci $v=4$.

Ecuația are acum trei necunoscute.

(4) $5x+25y+125z=190$

Împărțind cu 5 și judecînd similar avem :

(5) $x+5y+25z=35+3$

Rezultă $x=3$

(6) $5y+25z=35$

(7) $y+5z=5+2$

Rezultă $y=2$

(8) $5z=5$

$z=1$

Recapitulînd, rădăcinile sînt : $v=4$; $x=3$; $y=2$; $z=1$.

27. Înmulțirea a două numere necunoscute [+]

Se dau numerele $\overline{xy}$ de ordinul II și $\overline{ztv}$ de ordinul III, cu valorile $(10x+y)$ și $(100z+10t+v)$

Se vor determina cele cinci cifre necunoscute **(x, y, z, t, v)**, știind că produsul numerelor este 1111.

Răspuns :

(1) $(10x+y)(100z+10t+v)=1\,000x\cdot z+100x\cdot t+10x\cdot v+$ $+100y\cdot z+10y\cdot t+y\cdot v=1111$

Ordonăm astfel :

(2) $1\,000x\cdot z+100(x\cdot t+y\cdot z)+10(x\cdot v+y\cdot t)+y\cdot v=$ $=1\,000+100+10+1$

Observați aici, că $x\cdot z$; $x\cdot t$ etc., cu punct între ele, reprezintă produsul a două numere de cîte o cifră, iar rezultatul 1111 l-am descompus pentru a putea proceda la identificare.

Pentru ca egalitatea (2) să fie valabilă, e necesar ca :

(3) $1\,000x\cdot z=1\,000$ (termenii de ordinul miilor)

$x\cdot z=1 \Rightarrow x=1$; $z=1$ (în mod necesar, căci toate necunoscutele **x**, y, z, t și v sînt cifre, deci numere întregi !)

(4) $100(x\cdot t+y\cdot z)=100$ (termenii de ordinul sutelor)

$x\cdot t+y\cdot z=1$ pentru $x=1$ și $z=1$; din ecuația (3) avem :

$t+y=1$ Deci, avem două posibilități $t=0$; $y=1$; sau $t=1$ și $y=0$. Le reținem !

(5) $10(x\cdot v+y\cdot t)=10$ (termeni de ordinul zecilor)

$x\cdot v+y\cdot t=1$

Din relația (4) a rezultat că t sau y este nul, deci în orice caz $y\cdot t=0$ și atunci ec. (5) devine :

(5') $x\cdot v=1$ pt. $x=1$ (determinat mai sus) $\Rightarrow v=1$

(6) $y\cdot v=1$ (unitățile).

pentru $v=1 \Rightarrow y=1$

Revenind la ecuația (4), rezultă în mod necesar pentru $y=1$; $t=0$.

Deci, cele cinci cifre sînt :

$$x=1\ ;\ y=1\ ;\ z=1\ ;\ t=0\ ;\ v=1$$

Operația de înmulțire era :

$$11\times101=1111$$

Observații: Operația de înmulțire se putea pune și sub forma:

$$\begin{array}{rrrr} & z & t & v \\ & & x & y \\ \hline & y\cdot z & y\cdot t & y\cdot v \\ x\cdot z & x\cdot t & x\cdot v & \end{array}$$

$x\cdot z$	$y\cdot z+x\cdot t$	$y\cdot t+xv$	$y\cdot v$
mii	sute	zeci	unități
1	1	1	1

Și rezultau ecuațiile (3), (4), (5), (6), în forma simplificată.

28. Unde-i greșeala ?

Urmăriți exactitatea calculelor de mai jos și spuneți unde e greșeala :

I. $a^2-b^2\equiv(a+b)(a-b)$

Considerăm $a=b$ și avem:

$a^2-a^2=(a+a)(a-a)$

$a(a-a)=2a(a-a)$ Împărțim cu a

$a=2a$ Împărțim cu $(a-a)$

$1=2$

II. Considerăm trei numere diferite ($a\neq b\neq c$) și relația de mai jos :

$a-b=c$. Amplificăm cu $(a-b)$

$(a-b)^2=(a-b)c$

$a^2-2ab+b^2=ac-bc$

$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc$

$a(a-b-c)=b(a-b-c)$ Împărțim cu $(a-b-c)$

$a=b$

Răspuns I: Am greșit atunci cînd am împărțit ambii membri ai egalității cu zero ($a-a=0$).

Răspuns II: Am greșit cînd am împărțit cu $(a-b-c)$, a cărui valoare este zero, conform relației inițiale ($a-b=c \Rightarrow a-b-c=0$).

29. Binomul la pătrat

Se dă expresia $E=x+2\cdot\sqrt{x-1}$, care reprezintă dezvoltarea unui binom la pătrat.

Găsiți acel binom !

Indicații : Vă reamintesc că $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, sau mai aproape de tema noastră : $(x+1)^2=x^2+2x+1$

Răspuns :

Pentru trecerea de la forma dezvoltată la cea restrînsă a pătratului unui binom, căutăm să identificăm pătratele (x^2 sau y^2), sau termenul din mijloc (2xy adică : de două ori partea întîi, deînmulțită cu a doua !).

În cazul dezvoltării noastre avem numai doi termeni, în loc de trei, deci trebuie să adăugăm noi un termen, dar în același timp să-l și scădem pentru a nu schimba valoarea ei.

Observăm că termenul $2\cdot\sqrt{x-1}$ este termenul de la mijloc (de două ori...) și că el (ca de altfel întreaga expresie) nu conține decît o necunoscută, și anume necunoscuta x. Binomul nostru va fi compus dintr-un termen care conține pe x, sau mai precis după termenul $2\cdot\sqrt{x-1}$ va conține pe $\sqrt{x-1}$, iar celălalt termen va fi 1 (a se vedea indicațiile !). Deci, va trebui să adăugăm 1 și să scădem 1. În această situație, expresia dezvoltată va fi :

$$E=x+2\cdot\sqrt{x-1}+1-1$$

Se simte ușor necesitatea de a grupa pe x cu —1, după expresia de sub radical, deci

$$E=x-1+2\cdot\sqrt{x-1}+1$$

Acum căutăm cele două pătrate : primul este 1 (pătratul lui însuși), iar al doilea x—1 (pătratul lui $\sqrt{x-1}$). Termenul de la mijloc verifică formula binomului la pătrat, deci :

$$E=x-1+2\cdot\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}+1)^2$$

Observații : Rezolvarea ar fi fost asemănătoare dacă se da expresia $E=x-2\cdot\sqrt{x-1}$, care ne-ar fi condus la binoul $(\sqrt{x-1}-1)^2$

30. Expresia $(n^5 - n)$

În această expresie $\begin{cases} n \in Z \\ n \geqslant 2; \quad n \leqslant -2 \end{cases}$

Să se arată că e divizibilă cu 30.

Răspuns :

$$E = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

Ordonăm crescător și avem :

$$E = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n^2+1)$$

Primele două numere $(n-1)$ și n sînt consecutive, deci unul este cu soț, iar altul fără soț. Înseamnă că unul din ele va fi divizibil cu 2.

Primele trei numere sînt, de asemenea, consecutive și, în mod necesar, unul din ele e divizibil cu 3.

Explicație :

Luăm trei numere consecutive oarecare și facem ipoteza că primul nu e divizibil cu 3 (dacă e divizibil, problema nu se mai pune). Înseamnă că suma cifrelor sale nu se împarte exact cu 3, ci mai rămîne rest 1 sau 2. Dacă restul e 2, rezultă că numărul următor — mai mare cu o unitate — va vea restul $2+1=3$, adică se va putea împărți cu 3, deci, practic, nu va avea rest. Același raționament și pentru cazul în care restul ar fi fost 1. Ultimul număr, mai mare cu 2 unități decît primul, se va împărți în mod necesar la 3.

În concluzie, stabilim o regulă utilă : produsul a trei numere consecutive se divide cu 2 și cu 3, deci cu 6. Deci expresia E este divizibilă cu 6.

Pentru a demonstra că expresia este divizibilă cu 5, facem următoarea observație : pătratul oricărui număr întreg se termină cu una din cifrele 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 (verificați !).

Acum, punem expresia sub forma :

$E = n(n^2-1)(n^2+1)$ și avem următoarele situații :

a) $n=5$. Rezultă E e divizibilă cu 5.

b) $n \neq 5$ și n^2 se termină cu 1 sau 6. Rezultă (n^2-1) se va termina cu 0 sau 5 și e divizibil cu 5, deci E este divizibilă cu 5.

c) $n \neq 5$ și n^2 se termină cu 4 sau 9. Rezultă (n^2+1) se va termina cu 5 sau 0 și e divizibil cu 5, deci E divizibilă cu 5.

d) n^2 se termină cu cifra $5 \Rightarrow$ n se termină cu cifra 5, deci E este divizibil cu 5.

Cazul în care puterea unui număr întreg se termină cu zero nu-l luăm în considerație, deoarece el poate fi numai o putere a lui n=10, care e divizibil cu 5, deci și expresia E e divizibilă cu 5.

Deci, am analizat toate variantele ce se pot ivi cu ultima cifră (0, 1, 4, 5, 6, 9) a puterii a doua a unui număr întreg.

În final, am stabilit că expresia $E=n^5-n$ este divizibilă cu 2, 3 și 5, deci divizibilă cu $2\times3\times5=30$.

31. Simplă aritmetică (I)

(suma și diferența a doua numere)

Găsiți două numere a căror sumă este 102 și diferență 26.

Răspuns 1 :

Numărul mai mare este egal cu cel mic plus diferența.

Să facem această substituție în gîndirea noastră, adică să înlocuim numărul mai mare cu «cel mic plus diferența». Vom putea afirma că suma celor două numere este : cel mic plus diferența, plus cel mic. Deci, de două ori numărul mai mic plus diferența.

Rezultă că dacă vom scădea din suma numerelor, diferența lor, vom obține de două ori numărul mic.

Vom avea :

102—26=76

76 : 2=38 (numărul mic)

Numărul mai mare se află acum foarte simplu :

102—38=64.

Observație : Judecata de mai sus o putem exprima mai ușor astfel :

Notăm : N=numărul mai mare
n=numărul mai mic

Suma numerelor este evident $N+n$, iar diferența $N-n$.

Scădem din suma lor, diferența și vom avea :

$$(N+n)-(N-n)=N+n-N+n=2n.$$

Adică așa cum am exprimat în răspuns ; «de două ori numărul mic» (2n).

Răspuns 2 :

Numărul mic plus diferența celor două numere, ne dă numărul mare.

Deci dacă la suma celor două numere adăugăm diferența lor, vom obține de două ori numărul mai mare.

Urmăriți și schema de mai jos :

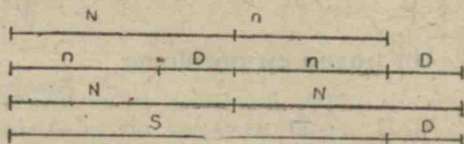
În care am notat :

N=numărul mare

n=numărul mic

D=diferența lor (N—n)

S=suma lor (N+n)



Din răspunsul de mai sus și din schemă rezultă :

S+D=2N

102+26=2N

N=64

n=102—64=38

Note : 1) Dacă apelăm la algebră, problema se simplifică :

N+n=S

N—n=D

2N=S+D

2) Putem reține două reguli practice :

— dacă scădem din suma a două numere, diferența lor, obținem de două ori numărul mic (S—D=2n).

— dacă adunăm suma și diferența a două numere, obținem dublul numărului mai mare (S+D=2N).

32. Simplă aritmetică (II)

Împărțiți numărul 251 în trei părți, astfel încît partea a doua să fie mai mare decît prima cu 23, iar partea a treia să fie mai mare decît a doua cu 7.

Răspuns 1 :

Vom exprima partea doua și a treia, în funcție de prima !

Partea doua este partea întîia plus 23.

Partea treia este partea doua plus 7, deci partea întîi plus 30.

Suma lor (251) e formată din de trei ori partea întîi plus 53 (23+30=53).

251—53=198

198 : 3=66 (partea întîi).

Celelalte părţi rezultă imediat şi sînt 89 şi respectiv 96.

Dumneavoastră încercaţi o altă rezolvare, exprimînd partea întîi şi a treia în funcţie de a doua.

Răspuns 2 :

Soluţia algebrică este :

$$\begin{cases} x+y+z=251 & (1) \\ y=x+23 & (2) \\ z=y+7 & (3) \end{cases}$$

Metoda substituţiei ne dă :

$$\begin{cases} x=66 \\ y=89 \\ z=96 \end{cases}$$

33. Un traseu cu probleme

Luaţi patru localităţi, în ordine — de la stînga la dreapta — A, B, C, D. Drumul de la A la B este de trei ori mai mic decît cel de la B la D, iar drumul de la C la D este de cinci ori mai mic decît cel de la A la C. Dacă distanţa între B şi C măsoară 42 km, aflaţi lungimea întregului traseu A—D.

Rezolvare :

Conform textului, avem :

(1) $AB=\frac{BD}{3} \Rightarrow BD=3AB$

(2) $AD=AB+BD=AB+3AB=4AB \Rightarrow AB=\frac{AD}{4}$

(3) $CD=\frac{AC}{5} \Rightarrow AC=5CD$

(4) $AD=AC+CD=5CD+CD=6CD \Rightarrow CD=\frac{AD}{6}$

(5) $BC=AD-AB-CD=AD-\frac{AD}{4}-\frac{AD}{6}=\frac{7AD}{12}$

(6) $AD=\frac{12BC}{7}$

(dar BC=42 km)

(7) $AD=\frac{12BC}{7}=\frac{12\times 42}{7}=72$ km (lungimea întregului traseu).

(8) $AB=\frac{72}{4}=18$ km [din relaţia (2)]

(9) $CD=\frac{72}{6}=12$ km [din relaţia (4)]

Verificare :

$BD = BC + CD = 42 + 12 = 54$ km

$AB = \frac{BD}{3} = \frac{54}{3} = 18$ km (conform textului : «de trei ori mai mic»)

$AC = AB + BC = 18 + 42 = 60$ km

$CD = \frac{AC}{5} = \frac{60}{5} = 12$ km (conform textului : «de cinci ori mai mic»)

$AD = AB + BC + CD = 18 + 42 + 12 = 72$ km

34. Produse cu valoare constantă

Produsul a trei perechi de numere distincte, de ordinul II, este constant și anume 1155.

Puteți găsi aceste perechi de numere ?

Răspuns :

Descompunem numărul 1155 în factori primi și rezultă :

$$1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

Grupăm convenabil acești factori, astfel încît din produsele lor parțiale să rezulte numere de ordinul II (al zecilor).

Veți obține următoarele perechi de numere :

$$15 \times 77 = 1155$$
$$21 \times 55 = 1155$$
$$33 \times 35 = 1155$$

Notă :

Observați că nu puteam lua separat pe 11, deoarece produsul celorlalte trei numere este $3 \times 5 \times 7 = 105$, adică ar fi rezultat un număr de ordinul III (al sutelor), contravenind textului problemei.

Rezolvați singuri o problemă similară, în care produsul perechilor de numere este 364.

35. O împărțire cu și fără rest

Să se reconstituie împărțirea, în care deîmpărțitul este un număr de ordinul trei (sutelor), avînd aceeași cifră la sute și zeci, cifra unităților egală cu 5, iar restul împărțirii este 8. Nu cunoaștem nimic despre împărțitor și cît.

Vă reamintim că formula generală a împărțirii este .

$\frac{D}{I}=C+\frac{R}{I}$, sau $D=I\times C+R$, notațiile avînd semnificațiile în ordine : deîmpărțit, împărțitor, cît și rest. În plus, conform textului problemei, deîmpărțitul este de forma $\overline{aa5}$, avînd valoarea $100a+$ $+10a+5$

Răspuns :

Dacă scădem restul din deîmpărțit, vom obține un număr egal cu produsul $I\times C$, conform celor de mai jos :

(1) $D-R=I\times C+R-R$

(2) $D-R=I\times C$

Deci, revenind la problemă, noul nostru deîmpărțit este $\overline{aa5}-8$ și el va fi egal cu produsul $I\times C$, adică

(3) $\overline{aa5}-8=I\times C$

Observați însă că $\overline{aa5}-8=\overline{a(a-1)\,7}$, adică noul deîmpărțit are cifrele sutelor și zecilor consecutive — descrescătoare, iar cifra unităților egală cu 7.

Am transformat astfel împărțirea inițială cu rest, în împărțire fără rest, care — în noile condiții — arată astfel :

(4) $\overline{a(a-1)\,7}=I\times C$

Cifra 7 de la unități se poate obține numai din produsele 7×1 sau 9×3 (verificați). Rezultă că numai aceste două perechi de cifre pot să apară la unitățile lui *I* și *C*, restrîngîndu-se astfel substanțial sfera cercetărilor noastre.

Soluția A. Să analizăm varianta 7×1 și să considerăm că 7 este valoarea cîtului *C*, iar 1 este cifra unităților de la împărțitorul *I* sau invers, deoarece în orice produs nu are importanță ordinea factorilor. Dacă $c=7$ și $I=\overline{m1}$, problema s-a redus la egalitatea :

(5) $\overline{m1}\times 7=\overline{a\,(a-1)\,7}$

Deci produsul $7\times m$ trebuie să fie un număr de două cifre consecutive — descrescătoare $a\,(a-1)$. Din tabla înmulțirii deducem că m trebuie să ia valoarea 3, deoarece $7\times 3=21$, satisfăcînd astfel condiția impusă. Deci, $m=3$; $a=2$; $a-1=1$.

În acest fel, egalitatea de mai sus (5) devine :

(6) $31 \times 7 = 217$

Adică : (7) $217 : 31 = 7$

Sau : (8) $217 : 7 = 31$

Am rezolvat astfel împărţirea fără rest. Pentru a trece la aceea cu rest, vom adăuga la deîmpărţit restul 8 şi vom obţine $217 + 8 = 225$ valoarea deîmpărţitului cerut prin text. În acest caz, împărţirea este :

(9) $$\frac{225}{31} = 7 + \frac{8}{31}$$

Sau : (10) $225 = 31 \times 7 + 8$

Soluţia B. Varianta 9×3 o analizăm în mod similar, reducînd problema la înmulţirea :

(11) $\overline{n3} \times 9 = \overline{b\,(b-1)\,7}$

Vom observa mai întîi că de la înmulţirea lui 9 cu 3 punem 7 la unităţile produsului şi ţinem 2, pe care îl vom adăuga la produsul $9 \times n$, astfel încît să rezulte un număr de două cifre consecutive-descrescătoare $\overline{b\,(b-1)}$.

De la înmulţirea cu 9 ştim că numai $9 \times 7 = 63$, ne dă un număr la care cifra unităţilor este mai mică cu 3 decît cifra zecilor, astfel încît adunată cu 2 să obţinem numărul cu cifrele consecutive-descrescătoare 65.

Rezultă $n = 7$, împărţitorul $I = 73$, cîtul $C = 9$ şi produsul lor.

(12) $73 \times 9 = 657$

Dacă la rezultat adunăm 8, obţinem 665 valoarea deîmpărţitului care satisface textul problemei date :

(13) $665 = 73 \times 9 + 8$

Sau :

(14) $$\frac{665}{73} = 9 + \frac{8}{73}$$

În final, rezultă că problema are două soluţii, pe care acum le punem sub forma obişnuită a împărţirii :

Soluţia A

```
225 | 31
217 |----
--- |  7
  8 |
```

Soluţia B

```
665 | 73
657 |----
--- |  9
  8 |
```

36. E (x, y, z)

Se dă exxpresia :

$$E \equiv \overline{xyz} + \overline{zyx}$$

în care suma $(x + z)$ este în același timp divizibilă cu 4 și cu 5. Trebuie să arătați că întreaga expresie E este divizibilă cu 4 și 5.

Răspuns :

Sub forma dată prin text, expresia $E\ (x,\ y,\ z)$ nu poate fi analizată, de aceea o vom pune sub forma care ne arată ordinul de mărime pe care îl reprezintă fiecare necunoscută.

Știm că un număr de ordinul 3 de forma $\overline{xyz}$ se poate scrie, pentru a putea fi folosit în calcule, astfel :

$$\overline{xyz} \equiv 100x + 10y + z$$

În acest caz, expresia dată prin text devine :

$$E \equiv 100x + 10y + z + 100z + 10y + z =$$
$$= 100\,(x + z) + 20y + x + z.$$

Se observă ușor că atît coeficientul 100 al primului termen, cît și 20 al celui de-al doilea termen sît dizivibili cu 4 și 5. Deoarece și suma $(x + z)$ este divizibilă cu 4 și 5 (conform textului), rezultă că întreaga expresie $E\,(x,\ y,\ z)$ este divizibilă cu cele două numere date.

37. E (x, y, z, t)

Se dă expresia :

$E = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}$

Să se arate că întreaga expresie $E\,(x,\ y,\ z,\ t)$ este dizivibilă cu 11.

Răspuns :

Procedînd asemănător ca la exercițiul anterior vom avea :

$E = 1000x + 100y + 10z + t + 1000t + 100z +$

$+ 10y + x \equiv 1001x + 1001t + 110y + 110z =$

$= 1001\,(x + t) + 110\,(y + z)$

Deoarece coeficienții ambilor termeni ai expresiei sînt divizibili cu 11, rezultă că întreaga expresie este divizibilă cu 11.

38. Divizibilitatea

Arătaţi cu ce numere sînt divizibile expresiile de mai jos. Consideraţi $n \in N^*$, adică n este număr natural (poate lua valori numere întregi şi pozitive ; remarcaţi că am exclus valoarea zero).

a) $5^n \cdot 2^{n+1} + 1$
b) $5^n \cdot 2^n + 8$
c) $5^{n+2} \cdot 2^{n+1} + 1$
d) $5^{n+3} \cdot 2^n + 1$

Răspunsuri :

a) $5^n \cdot 2^{n+1} = 5^n \cdot 2^n \cdot 2 + 1 = (5 \cdot 2)^n \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 10^n + 1$

Indiferent de valoarea lui n, produsul $2 \cdot 10^n$ va da un număr a cărui primă cifră va fi 2, iar celelalte zero. Adăugînd pe 1, suma cifrelor acestui număr va fi 3, deci numărul va fi dizivibil cu 3. Evident, am exclus divizorii proprii (unul şi el însuşi) şi cîtul rezultat din împărţirea cu 3. Ordinul de mărime al numărătorului va fi dat de mărimea lui n. Pentru $n = 1$, numărul va fi de 21, pentru $n=2$ numărul va fi 201 etc.

b) $5^n \cdot 2^n + 8 = (5 \cdot 2)^n + 8 = 10^n + 8$

Prima cifră a numărului va fi 1, ultima cifră 8, iar celelalte zero.

Suma cifrelor este 9, deci numărul este divizibil cu 9 şi implicit cu 3. Fiind par, numărul e divizibil şi cu 2. Pentru $n > 1$ numărul e divizibil şi cu 4.

c) $5^{n+2} \cdot 2^{n+1} + 1 = 5 \cdot 5^{n+1} \cdot 2^{n+1} + 1 = 5 \cdot (5 \cdot 2)^{n+1} + 1 =$
$= 5 \cdot 10^{n+1} + 1$

Numărul este impar, suma cifrelor sale este 6, indiferent de valoarea lui n. Rezultă că numărul este divizibil cu 3.

d) $5^{n+3} \cdot 2^n + 1 = 5^3 \cdot 5^n \cdot 2^n + 1 = 5^3 \cdot (5 \cdot 2)^n + 1 = 125 \cdot 10^n + 1$

Primele cifre ale numărului sînt 1 ; 2 şi 5, iar ultima 1.
Pentru $n = 1$, numărul este 1251. Pentru $n > 1$, între cifrele 5 şi 1 apar zerouri.
Suma cifrelor rămîne, pentru orice valoare a lui n, egală cu 9 deci numărul este divizibil cu 9 şi implicit cu 3.

Atenţie : aşa cum am arătat la punctul a), în răspunsurile de mai sus, nu am luat în considerare cîturile rezultate din împărţirea expresiilor la numerele cu care acestea se divid (2 ; 3 ; 9).

39. Un număr întreg

Arătați ce valori din mulțimea numerelor naturale trebuie să ia n, astfel încît fracția $\frac{n+5}{n-4}$ să fie un număr întreg.

Rezolvare :

Observați că diferența între numărător și numitor este 9, indiferent de valoarea lui n.

$n+5-(n-4)=9$

În această situație facem substituțiile :

$n-4=p \Rightarrow n=p+4$

Cu această valoare a lui n rezultă :

$n+5=p+9$

Fracția devine :

$$\frac{p+9}{p}=\frac{p}{p}+\frac{9}{p}=1+\frac{9}{p}$$

Pentru ca fracția să fie un număr întreg, este necesar și suficient ca $\frac{9}{p}$ să fie număr întreg, adică p să fie egal cu 1 ; 3 sau 9.

$p=1 \Rightarrow n=p+4 \equiv 5$

$p=3 \Rightarrow n=7$

$p=9 \Rightarrow n \equiv 13$

Fracția va lua — în ordine — următoarele valori : 10 ; 4 ; 2.

40. Trei tractoare

Un tractor ară o suprafață în 10 zile, al doilea în 12 zile, iar al treilea în 15 zile. Dacă ar lucra toate trei simultan, în cîte zile ar putea ara suprafața respectivă ?

Răspuns :

Notăm cu S suprafața de arat, deși — așa cum se va putea constata — ea poate fi considerată egală cu unitatea, deci egală cu 1.

Producția zilnică a primului tractor (dacă vreți, un fel de debit măsurat în hectare pe zi) este $\frac{1}{10}S$, a celui de al doilea $\frac{1}{12}S$, iar a celui de al treilea $\frac{1}{15}S$

Lucrînd împreună, cele trei tractoare vor ara într-o singură zi :

$$\frac{1}{10}S+\frac{1}{12}S+\frac{1}{15}S=\frac{12S+10S+8S}{120}=\frac{1}{4}S$$

Deci, într-o zi, cele trei tractoare pot ara o pătrime din suprafața S și vor avea nevoie de 4 zile pentru a ara întreaga suprafață.

Se vede ușor că, în locul necunoscutei S, puteam folosi unitatea (unu), rezultatul fiind același ($\frac{1}{4}$ din suprafața egală cu unu).

41. Echivalențe

Un turist intră într-un mare magazin din Paris și întreabă cît costă un anumit articol, i se răspunde : „30 de franci". Neavînd decît dolari și mărci, vînzătorul îi calculează prețul în aceste monede : „3 dolari și 7,5 mărci".

În aceeași zi, un alt turist are neplăceri asemănătoare la New-York, unde i se cer 3 dolari pe un alt articol, dar neavînd dolari, i se echivalează cu 5 mărci și 5 franci.

Considerind că cele două cursuri valutare de la Paris și New-York erau identice, aflați echivalența între cele trei monezi.

Răspuns 1 :

Din text rezultă că la Paris 3 dolari echivalează cu 30 franci minus 7,5 mărci, iar la New-York tot 3 dolari echivalează cu 5 mărci și 5 franci. Deci 30 franci minus 7,5 mărci sînt egali cu 5 mărci și 5 franci, de unde rezultă că 25 franci echivalează cu 12,5 mărci, sau 1 marcă este egală cu 2 franci (1m = 2f).

Mai departe, din echivalarea făcută în magazinul din Paris și corelînd cu rezultatul de mai sus, în loc de 7,5 franci vom considera 15 franci, deci 3 dolari echivalează cu 15 franci (30 franci — 15 franci), adică 1 dolar este egal cu 5 franci (1d = 5f).

Din calculele făcute la New-York rezultă că 3 dolari echivalează cu 5 mărci și 5 franci, deci cu 5 mărci plus 2,5 mărci, respectiv 7,5 mărci ; adică 1 dolar este egal cu 2,5 mărci (1d = 2,5m). La același rezultat se putea ajunge, folosind primele două echivalențe pe care le-am stabilit anterior (1m = 2f ; 1d = 5f).

Notă :

Rezolvarea orală făcută mai sus — pe care o considerăm foarte utilă pentru dezvoltarea raționamentului la copii — se poate face

— evident — rezolvînd sistemul de 2 ecuații cu 2 necunoscute ce rezultă din problemă.

(1) $\begin{cases} 30f = 3d + 7{,}5m \end{cases}$

(2) $3d = 5f + 5m$

(1') $3d = 30f - 7{,}5m$

(2') $3d = 5f + 5m$

Egalăm (1') cu (2') și rezultă :

(I) $30f - 7{,}5m = 5f + 5m$

$25f = 12{,}5m$

$1m = 2f$

(1'') $3d = 30f - 15f = 15f$

$1d = 5f$

(2'') $3d = 2{,}5m + 5m = 7{,}5m$

$1d = 2{,}5m$

42. Care număr este mai mare ? (I)

Vi se dau numerele 5^{200} și 3^{300}. Fără să efectuați ridicările la puterile respective — ar fi prea mult de calculat — vi se cere să apreciați care număr este mai mare și apoi să demonstrați acest lucru, folosind exclusiv regulile de calcul învățate la capitolul „Puterea unui număr".

Răspuns :

E greu de apreciat care număr este mai mare, avînd în vedere că în comparație intră un număr mai mic (baza 3) la o putere mai mare (300) și un număr mai mare, dar apropiat (baza 5) la o putere mai mică (200). Și în plus, nu vom face noi acest lucru, deoarece cunoaștem rezultatul și aprecierea noastră ar fi fără valoare.

Totuși, vă sfătuim, ca în astfel de situații să înclinați a afirma, că numărul cel mai mare este cel care are exponentul puterii mai mare, avînd în vedere că el — în cazul nostru — se mai înmulțește cu el însuși de încă o sută de ori, față de celălalt.

Și acum demonstrația cerută :

$5^{200} = 5^{2 \cdot 100} = (5^2)^{100} = 25^{100}$

$3^{300} = 3^{3 \cdot 100} = (3^3)^{100} = 27^{100}$

Deoarece $27^{100} > 25^{100}$

Rezultă $3^{300} > 5^{200}$

Comparaţia între cele două numere se mai putea continua şi astfel:

$$\frac{27^{100}}{25^{100}}=\left(\frac{27}{25}\right)^{100}>1$$

Şi cum fracţia este supraunitară, rezultă că numărătorul este mai mare decît numitorul, ajungînd astfel la acelaşi rezultat.

43. Care număr este mai mare? (II)

Se dau 22^{33} şi 33^{22}. Arătaţi care din ele este mai mare. Consideraţi că pot fi egale?

Rezolvare:

Vom face raportul celor două mărimi:

$$\frac{22^{33}}{33^{22}}=\frac{(2\,.\,11)^{3\cdot 11}}{(3\,.\,11)^{2\cdot 11}}=\frac{2^{3\cdot 11}\,.\,11^{3\cdot 11}}{3^{2\cdot 11}\,.\,11^{2\cdot 11}}=\frac{2^{3^{11}}\,.\,11^{33}}{3^{2^{11}}\,.\,11^{22}}=\frac{8^{11}\,.\,11^{33}}{9^{11}\,.\,11^{22}}=$$

$$=\frac{8^{11}\,.\,11^{11}}{9^{11}}>1$$

Ultimul raport l-am simplificat cu 11^{22}.

Se observă uşor că un singur factor de la numărător (şi anume 11^{11}) este mai mare decît numitorul 9^{11}. Rezultă că numărătorul este mult mai mare decît numitorul, deci:

$$22^{33}\gg 33^{22}$$

Sau plecînd de la ultima formă, avem:

$$\frac{8^{11}\,.\,11^{11}}{9^{11}}=\left(\frac{8\,.\,11}{9}\right)^{11}=\left(\frac{88}{9}\right)^{11}$$

Raportul $\frac{88}{9}$ este supraunitar, avînd valoarea 9,(7). Ridicat la o putere, raportul rămîne supraunitar; la puterea 11 valoarea lui creşte considerabil. Reţinem doar că el rămîne un raport supraunitar, deci numărătorul este mai mare decît numitorul, adică $22^{33}>33^{22}$.

Încercaţi o rezolvare similară pentru 202^{303} şi 303^{202} observînd că $202=2\times 101$ etc.

44. Ultima cifră a numărului

Vi se dau numerele 3^{104}; 3^{105}; 3^{106}; 3^{107}; 3^{108}; 3^{109}. Precizați pentru fiecare număr, care este ultima cifră a sa (cifra de la unități), fără să efectuați ridicarea la putere.

Răspuns :

Vom analiza ce se întîmplă cu primele puteri ale bazei 3, în ipoteza că — pentru ultima cifră — va apărea o anumită periodicitate. Astfel :

puterea	ultima cifră
3^0	1
3^1	3
3^2	9
3^3	7
3^4	1
3^5	3
3^6	9
3^7	7
3^8	1
3^9	3
3^{10}	9
3^{11}	7
3^{12}	
.	.
.	.
.	.

Se observă, astfel, că pentru exponentul puterii a cărui valoare se împarte exact cu 4 (exponenții 4, 8, 12) ultima cifră a numărului este 1, iar pentru exponenții puterilor ale căror valori nu se împart exact cu 4, rămînînd rest :

1 — ultima cifră este 3

2 — ultima cifră este 9

3 — ultima cifră este 7

Acum putem rezolva ușor problema ! Vom împărți valorile exponenților la 4 și în funcție de mărimea restului vom indica imediat, care este ultima cifră a numărului respectiv.

104 : 4 — rest 0, ultima cifră 1
105 : 4 — rest 1, ultima cifră 3
06 : 4 — rest 2, ultima cifră 9
.07 : 4 — rest 3 ; ultima cifră 7
108 : 4 — rest 0 ; ultima cifră 1
109 : 4 — rest 1 ; ultima cifră 3

Notă : Rezolvaţi aceeaşi problemă pentru valori ale bazei egale cu 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 şi veţi găsi :

— baza 2 — ultima cifră 2 ; 4 ; 8 ; 6
— baza 4 — ultima cifră 4 ; 6
— baza 5 — ultima cifră 5
— baza 6 — ultima cifră 6
— baza 7 — ultima cifră 7 ; 9 ; 3 ; 1
— baza 8 — ultima cifră 8 ; 4 ; 2 ; 6
— baza 9 — ultima cifră 9 ; 1
— baza 10 — ultima cifră 0

Am exclus puterea zero a acestor baze [a cărei valoare este totdeauna egală cu 1 (unu)], deoarece ea face parte din periodicitatea stabilită mai sus, numai la bazele 3 ; 7 şi 9 (la care apare ca ultimă cifră — la anumite puteri — cifra 1).

45. Două numere cu cifre identice.

Dintr-un număr de cinci cifre vom face două numere de şase cifre, astfel :

N_I — în faţa celor cinci cifre scriem cifra 1.

N_{II} — la urma aceloraşi cinci cifre scriem tot cifra 1.

Să se identifice cele cinci cifre, cunoscînd că N_{II} este de trei ori mai mare decît N_I

Răspuns :

Vom apela exclusiv la regulile elementare ale înmulţirii.

Cele două numere pot fi scrise astfel :

N_I = 1 a b c d e
N_{II} = a b c d e 1

Şi acum, înmulţirea cu trei!

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d\,e \times \\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,e\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 - - - 5\,7 \times \\ 3 \\ \hline - - - 5\,7\,1 \end{array}$$

— 3·e trebuie să ne dea un număr cu cifra 1 la unităţi, deci e=7; trecem la înmulţirea din partea dreaptă, în locul liniuţelor, cifra 7 (sus la deînmulţit ultima poziţie în dreapta şi jos la produs poziţia doua din dreapta către stînga).

— 3·d plus 2, reţinut de la înmulţirea anterioară 3×7, trebuie să ne dea un număr cu cifra 7 la unităţi, deci 3 d trebuie să dea un număr cu cifra 5 la unităţi, deci d=5; trecem cifra 5 la deînmulţit (poziţia doua din dreapta) şi la rezultat (poziţia treia din dreapta).

Aplicînd acelaşi procedeu în continuare pentru următoarele două poziţii, vom ajunge la următoarea înmulţire:

$$\begin{array}{r} 1\,a\,2\,8\,5\,7 \times \\ 3 \\ \hline a\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

De la operaţia anterioară 3×2+2=8, am scris 8 şi nu am reţinut nimic, deci 3×a trebuie să ne dea un număr de ordinul doi cu cifra 2 la unităţi; rezultă a=4.

Şi acum, înmulţirea care satisface condiţiile problemei este:

$$\begin{array}{r} 1\,4\,2\,8\,5\,7 \times \\ 3 \\ \hline 4\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

46. Suma a trei numere necunoscute

Suma a trei numere este 470. Dacă primul număr este mai mare cu 5 decît al doilea, iar al treilea este de trei ori mai mare decît primul, să se afle cele trei numere.

Notă: Faceţi ipoteza că sînteţi abia la începutul clasei a V-a elementară, deci nu apelaţi la calea algebrică de rezolvare!

Răspuns:

1) Conform textului, cel de-al doilea şi cel de-al treilea număr sînt definite în funcţie de primul număr. În consecinţă vom căuta să exprimăm toate cele trei numere în funcţie de primul număr.

Al treilea număr fiind de trei ori mai mare decît primul, rezultă că suma lor este egală cu de patru ori valoarea primului număr. Deci in loc de primul și al treilea număr, vom considera de acum înainte „de patru ori primul număr". Dacă primul număr este mai mare cu 5 decît al doilea, înseamnă că adunînd 5 la al doilea, mai găsim încă o dată primul număr.

Și acum, recapitulăm :

a) primul număr și cu al treilea număr sînt egale cu de patru ori primul număr.
b) al doilea număr plus 5 este egal cu primul număr.

Concluzie :

Suma celor trei numere plus 5 (adică $470+5=475$) este egală cu de cinci ori primul număr.
Primul număr rezultă $475:5=95$.
Celelalte numere le calculăm ușor, recitind textul problemei :

— al doilea număr este $95-5=90$
— al treilea număr este $3\times 95=285$

Iar suma celor trei numere găsite de noi, trebuie să fie — evident — aceea dată prin enunțul problemei :

$$95+90+285=470$$

2) Pentru rezolvare pe cale algebrică, vom forma doar sistemul de trei ecuații, cu trei necunoscute.

$$\begin{array}{ll} (1) & \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=470 \\ x=y+5 \\ z=3x \end{array} \right. \\ (2) & \\ (3) & \end{array}$$

Înlocuind în ec. (1) pe y și z în funcție de x (din celelalte două ecuații), rezultă imediat soluțiile sistemului.

1. Împărţirea ariei unui triunghi (I)

Se ia triunghiul oarecare ABC! Latura BC se împarte în cinci segmente egale iar capetele acestora se unesc cu A. Am notat pe figură ariile cu S1, S2, S3, S4 şi S5. Dv. puteţi să le ordonaţi după mărimea lor, de la cea mai mare la cea mai mică?

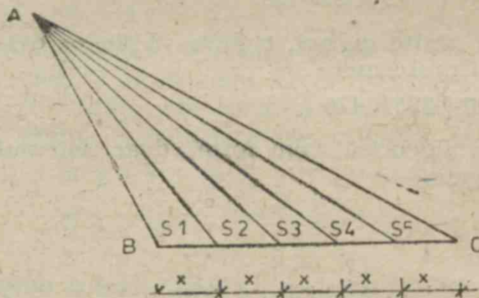


Fig. 1

Notă: Deoarece prezenta lucrare se adresează oamenilor de toate profesiunile, la acest capitol nu am folosit termenul de «congruent» («congruenţă»), propus în 1899 de Hilbert şi adoptat la noi în ultima perioadă de timp. Am menţinut termenul de «egal» («egalitate»), însuşit de matematicienii români din prima jumătate a acestui secol, termen familiar majorităţii cititorilor. De altfel, în latineşte, congruentia înseamnă acord, conformitate, potrivire, ceva mai puţin decît egalitate sau egal — identic.

Răspuns:

Pe figura dată la text, construiţi înălţimea din vîrful A pe BC. (fiind perpendiculară pe BC, va cădea evident pe prelungirea CB, în stînga lui B). Această înălţime a triunghiului ABC este în acelaşi timp înălţimea fiecăruia dintre cele cinci triunghiuri formate şi notate cu S1÷S5. Avînd aceeaşi bază $x = \frac{BC}{5}$ şi aceeaşi înălţime

AD (construiți-o Dv. !), ariile celor cinci triunghiuri sînt egale.

$$S1 = S2 = S3 = S4 = S5 = \frac{x \cdot AD}{2}$$

Notă: Latura BC se poate împărți în orice număr de segmente egale dorit de Dv. !

2. Împărțirea ariei unui triunghi în părți proporționale cu numere date (II)

Luați un triunghi și împărțiți-l în trei arii proporționale cu numerele 2, 3, 5.

Răspuns :

1) Se împarte latura BC în 2+3+5=10 segmente egale și capetele acestora se unesc cu A. S-au format zece triunghiuri ale căror suprafețe sînt egale, așa cum am văzut la problema precedentă. Se notează pe BC, cu M și N, limitele de 2 și, respectiv, 3 segmente egale și avem :

Aria ABM=2S ; Rezultă $S = \frac{\text{aria ABM}}{2}$

Aria AMN=3S ; Rezultă $S = \frac{\text{aria AMN}}{3}$

Aria ANC=5S ; Rezultă $S = \frac{\text{aria ANC}}{5}$

(unde $S = \frac{x \cdot h}{2}$; h=înălțimea △ ABC)

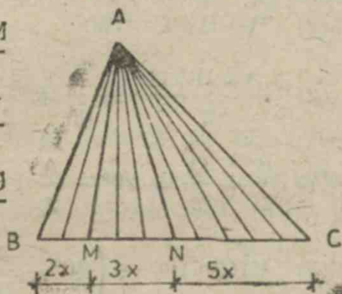


Fig. 2

Și proporționalitatea ariilor cu numerele 2 ; 3 și 5 rezultă imediat, din egalitatea relațiilor de mai sus.

$$S = \frac{\text{Aria ABM}}{2} = \frac{\text{Aria AMN}}{3} = \frac{\text{Aria ANC}}{5}$$

3. Bisectoarele a două unghiuri intr-un triunghi...

...formează un unghi, dependent numai de mărirea celui de-al treilea unghi. Arătaţi acest lucru!

Răspuns :

Se ia triunghiul oarecare ABC, se duc bisectoarele unghiurilor B şi C şi se notează cu I intersecţia lor.

În triunghiul BIC avem :

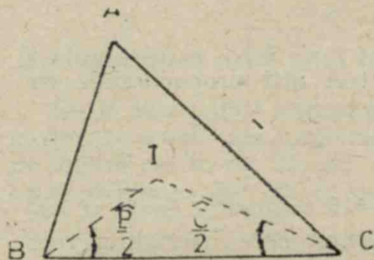


Fig. 3

$$(1)\quad \widehat{BIC}=180°-\frac{\widehat{B}}{2}-\frac{\widehat{C}}{2}=$$

$$=180°-\left(\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

Căutăm să înlocuim paranteza $\left(\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{C}}{2}\right)$, în funcţie de $\widehat{A}$.

În triunghiul ABC avem :

$$(2)\quad \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$$

$$(2)\quad \frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=\frac{\widehat{A}}{2}+\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{C}}{2}=90° \text{ de unde}$$

$$(2)\quad \frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{C}}{2}=90°-\frac{\widehat{A}}{2}$$ Înlocuim în (1) şi avem :

$$(3)\quad \widehat{BIC}=180°-\left(90°-\frac{\widehat{A}}{2}\right)=180°-90+\frac{\widehat{A}}{2}=90°+\frac{\widehat{A}}{2}$$

4. Două triunghiuri echilaterale

Luaţi un triunghi echilateral ABC şi înscrieţi în el tot un triunghi echilateral DEF cu laturile perpendiculare pe laturile primului triunghi ABC. Consideraţi că vîrfurile D, E, şi F sînt respectiv pe laturile AB, BC şi CA ($D\in AB$; $E\in BC$; $F\in CA$).

La ce distanțe de vîrfurile primului triunghi, cu latura egală cu a, trebuie să fixăm vîrfurile celui de al doilea triunghi, pentru a satisface condiția din problemă (laturi perpendiculare)? Care e mărimea laturii triunghiului înscris?

Răspuns:

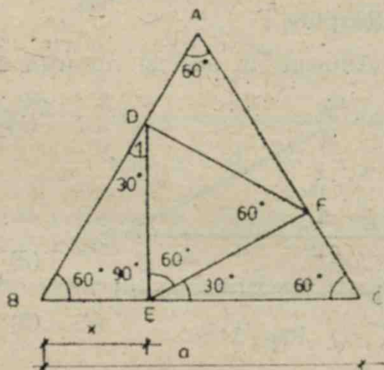


Fig. 4

Dintr-un punct D oarecare de pe AB ducem DE ⊥ BC. Notăm BE=x. În triunghiul dreptunghic BED avem $\widehat{B}=60°$ (prin ipoteză) și rezultă $\widehat{D1}=30°$. Știm că într-un triunghi dreptunghic, cateta care se opune unui unghi de 30° este jumătate din ipotenuză, deci DB=2BE=2x. Conform teoremei lui Pitagora $DE=x\sqrt{3}$. Cum laturile triunghiului înscris DEF sînt egale (el trebuie să fie echilateral), va trebui ca și $EF=x\sqrt{3}$; FC=x și EC=2x.

În acest caz, latura triunghiului echilateral ABC, să zicem

$$BC=BE+EC=x+2x=3x=a \Rightarrow x=\frac{a}{3}$$

Evident, FD va satisface aceleași condiții.

Deci $AD=BE=CF=x=\frac{a}{3}$ reprezintă distanța de la vîrfurile A, B și respectiv C, de la care trebuie construite laturile triunghiului DEF, perpendiculare pe laturile triunghiului ABC, cu mărimile calculate ca mai sus

$$DE=EF=FD=x\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

5. Triunghiul dreptunghic (I)

Se dă un triunghi dreptunghic ($\widehat{A}=90°$) în care notăm: ipotenuza cu a, înălțimea corespunzătoare ei cu h și cele două catete cu b, c.

Să se arate că :

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

Răspuns :

Aducem la același numitor în partea dreaptă a egalității

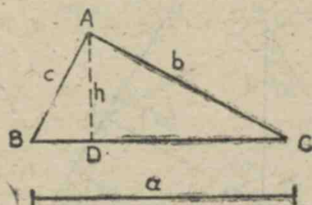


Fig. 5

(1) $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

$\frac{1}{h^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2\cdot c^2}$

(2) Dar $b^2+c^2=a^2$ (Pitagora)

(3) $\frac{1}{h^2}=\frac{a^2}{b^2\cdot c^2}$ $b^2\cdot c^2=a^2h^2$

Extragem radicalul și obținem :

(4) $b\cdot c=a\cdot h$

O relație cunoscută : produsul catetelor este egal cu produsul dintre ipotenuză și înălțimea corespunzătoare ei. Deci egalitatea de la care am pornit este corectă.

Observație !

Relația de mai sus (4) provine din scrierea ariei triunghiului dreptunghic în două feluri :

$$A=\frac{b\cdot c}{2}=\frac{a\cdot h}{2}$$

Rezultă $b\cdot c=a\cdot h$

6. Triunghiul dreptunghic (II)

În triunghiul dreptunghic ABC ($\widehat{A}=90^\circ$), ducem înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Cîte triunghiuri se obțin, ce fel de triunghiuri sînt și ce legătură este între ele ?

Răspuns :

Trei triunghiuri dreptunghice ABC, ABD și ADC, toate asemenea între ele, deoarece au cîte un unghi de 90° și cîte un unghi ascuțit egal, deci toate unghiurile egale. Egalitățile unghiurilor ascuțite le-am notat pe figură și pot fi deduse ușor de fiecare dintre Dv., ținînd seama de faptul că $\widehat{B}$ și $\widehat{C}$ sînt comune în triunghiul mare ABC și respectiv în triunghiurile ABD și ADC.

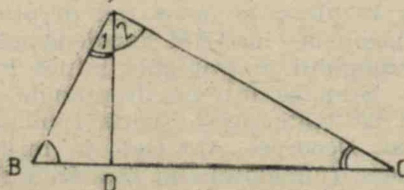


Fig. 6

Observați și perpendicularitatea laturilor unghiurilor $\widehat{B}$—$\widehat{A2}$ și $\widehat{C}$—$\widehat{A1}$.

7. Triunghiul dreptunghic (III)

Demonstrați relația cunoscută : într-un triunghi dreptunghic, mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din aceasta.

Răspuns 1 :

Triunghiul dreptunghic ABC ($\widehat{A}=90°$) este inscriptibil într-un cerc, în care BC este diametru ($\widehat{A}=90°$ subîntinde $\overset{\frown}{BC}=$ $=180°$ și evident $\widehat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}=$ $=\frac{180°}{2}=90°$).

M fiind mijlocul lui BC, rezultă BM=MC= raza cercului circumscris triunghiului. Vîrful A fiind pe cerc, AM este rază, deci : $AM=\frac{BC}{2}$.

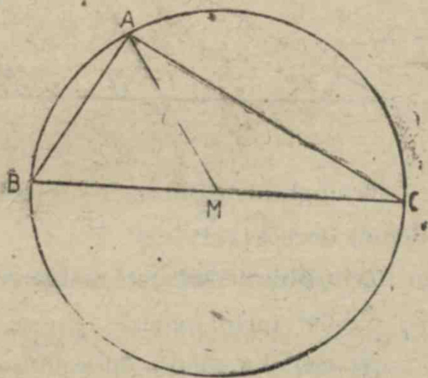


Fig. 7

Răspuns 2 :

În triunghiul ABC de mai sus duceţi BD ∥ AC şi CD ∥ AB. A rezultat, în acest fel, dreptunghiul ABDC, în care BC este o diagonală, iar AM mediana corespunzătoare ipotenuzei BC din triunghiul dreptunghic iniţial (completaţi singuri figura).

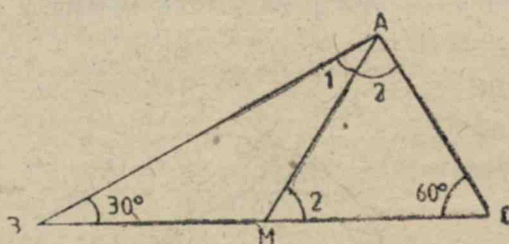
Ştim că într-un dreptunghi, diagonalele se taie în părţi egale şi că toate aceste părţi (jumătăţi de diagonale) sînt egale între ele. Deoarece AM cade în mijlocul lui BC, rezultă că ea este o parte (jumătate) din cea de a doua diagonală a dreptunghiului şi anume diagonala AMD.

Rezultă AM=MD=BM=MC.

8. Triunghiul dreptunghic (IV)

În triunghiul dreptunghic $\widehat{ABC}$ (A=90° şi $\widehat{B}$=30°) cateta AC (opusă unghiului de 30°) este jumătate din ipotenuză. Relaţia e cunoscută de Dv., dar în afara demonstraţiei trigonometrice vi se cere să o redaţi pe aceea geometrică!

Răspuns :



1) Trigonometric

$$\sin \widehat{B} = \sin 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$$

de unde $AC = \frac{BC}{2}$

2) Geometric (ducem mediana AM).

Triunghiul ABM este isoscel (AM=BM, din problema precedentă) deci $\widehat{A1} = \widehat{B} = 30°$.

Triunghiul AMC este echilateral, pentru că :

$\widehat{C} = 60°$ (prin ipoteză — este complementul lui $\widehat{B}$)

$\widehat{A_2} = 90° - \widehat{A_1} = 90° - 30° = 60°$

Iar, $\widehat{M2} = 180 - \widehat{A2} - \widehat{C} = 60°$ (în triunghiul AMC)

Deci, $\widehat{A2}=\widehat{C}=\widehat{M2}=60°$ și

$AM=MC=CA$

$CA=MC=\frac{BC}{2}$ (ceea ce era de demonstrat !)

9. Triunghiul dreptunghic (V)

Să se determine unghiurile triunghiului dreptunghic în care $a=2\sqrt{S}$ (s-a notat a = ipotenuza, iar S = aria triunghiului).

Răspuns :

Cu notațiile (ipotenuza = a, iar cele două catete b și c) avem :

1) $a=2\sqrt{S}$; dar $S=\frac{b\cdot c}{2}$

Înlocuim pe S și ce (1) devine :

(1) $a=2\sqrt{\frac{b\cdot c}{2}}$

Ridicăm la pătrat ambii membri ai egalității :

(1) $a^2=4\frac{b\cdot c}{2}=2b\cdot c$

Teorema lui Pitagora ne dă :

(2) $a^2=b^2+c^2$

Egalăm (1) cu (2)

(3) $b^2+c^2=2b\cdot c$

$b^2+c^2-2bc=0$

$(b-c)^2=0$

$b-c=0$

$b=c$ (Triunghiul dreptunghic este isoscel).

Rezultă $\widehat{B}=\widehat{C}=45°$

Observație :

Prin enunț am avut $a=2\sqrt{S}$ care ridicată la pătrat ne dă

(4) $a^2=4S$

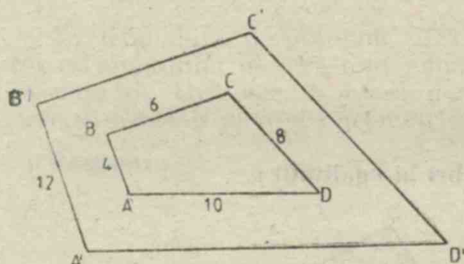
Adică pătratul ipotenuzei (de fapt o suprafață) este egal cu de patru ori suprafața S a triunghiului dreptunghic, care în final a rezultat că este isoscel.

Desenați acest triunghi dreptunghic isoscel și pe ipotenuza a (ca latură), construiți un pătrat care să includă triunghiul dreptunghic isoscel. Dacă prelungiți catetele triunghiului, nu veți face altceva decît să construiți diagonalele pătratului. Din figura realizată, veți putea deduce cu ușurință că suprafața pătratului (a^2) este de patru ori mai mare decît suprafața S a triunghiului dreptunghic.

10. Patrulatere asemenea (I)

Se dă un patrulater cu laturile de 4, 6, 8 și 10 cm. Un alt patrulater, asemenea lui, are latura cea mai mică de 12 cm. Să se calculeze celelalte laturi ale acestui patrulater.

Răspunsuri :



1. Patrulaterele fiind figuri asemenea au laturile proporționale. Raportul de proporționalitate este raportul între două laturi omoloage, în cazul nostru,

$$r = \frac{12}{4} = 3.$$

Deci, toate laturile noului patrulater vor fi de trei ori mai mari decît omoloagele lor din patrulaterul inițial ABCD.

$B'C' = 3BC = 3 \times 6 = 18$ cm.
$C'D' = 3CD = 3 \times 8 = 24$ cm.
$D'A' = 3DA = 3 \times 10 = 30$ cm.

2. Laturile celor două patrulatere fiind proporționale, rezultă că vom putea scrie un șir de rapoarte egale, în care la numărător vor fi lungimile laturilor unui patrulater, iar la numitor lungimile laturilor omoloage ale celuilalt patrulater.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

În cazul nostru :

$\frac{4}{12} = \frac{6}{B'C'} = \frac{8}{C'D'} = \frac{10}{D'A'}$, de unde rezultă laturile necunoscute.

11. Patrulatere asemenea (II)

Se dă același patrulater ca în problema precedentă și unul asemenea cu el, avînd suma lungimilor egală cu 56 cm. Se cer lungimile laturilor celui de al doilea patrulater.

Răspuns :

Vom aplica regula : „Întru-un șir de rapoarte egale, suma numărătorilor pe suma numitorilor ne dă un raport egal cu fiecare din rapoartele date".

Pentru ușurință, vom scrie la numărător lungimile laturilor patrulaterului mai mare $A'B'C'D'$.

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'A'}{DA}=\frac{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}{AB+BC+CD+DA}=\frac{56}{28}=2$$

Deoarece în fiecare din primele patru rapoarte cunoaștem numitorii, valorile numărătorilor rezultă imediat ($A'B'=8$; $B'C'=$ $=12$; $C'D'=16$; $D'A'=20$).

Observație : Suma lungimilor laturilor unui patrulater supra suma lungimilor laturilor celuilalt patrulater $\left(\frac{56}{28}=2\right)$ ne-a dat raportul de asemănare între cele două patrulatere. Evident, acest raport este egal și cu raportul dintre două laturi omoloage.

12. Un patrulater inscriptibil [+]

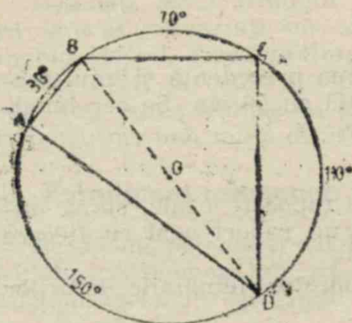
Patrulaterul $ABCD$ este înscris într-un cerc ale cărui arce $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ sînt proporționale cu 1 ; $\frac{7}{3}$; $\frac{11}{3}$ și 5. Să se arate că B, O, D, sînt coliniare.

Vă reamintesc următoarele : (1) Într-un patrulater inscriptibil, unghiurile opuse sînt suplementare ; (2) Un unghi pe cerc este egal cu jumătate din valoarea arcului subîntins.

Răspuns :

În baza proporționalității arătate în text, putem scrie șirul de rapoarte :

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{1}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{\frac{7}{3}}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{\frac{11}{3}}=\frac{\overset{\frown}{DA}}{5}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}}{1+\frac{7}{3}+\frac{11}{3}+5}=\frac{360^\circ}{\frac{36}{3}}=30^\circ$$



$$\overset{\frown}{AB} = 30°\ ;\ \overset{\frown}{BC} = \frac{7}{3} \cdot 30 = 70°\ ;$$

$$\overset{\frown}{CD} = \frac{11}{3} \cdot 30 = 110°$$

$$\overset{\frown}{DA} = 5 \cdot 30° = 150°$$

$$\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{70° + 110°}{2} = 90°$$

$$\widehat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{30° + 150°}{2} = 90°$$

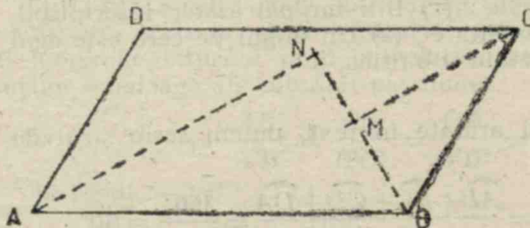
Deci, $\widehat{A}$ și $\widehat{C}$ subîntind diametrul *BD*, care conține în mod necesar și centrul cercului O. Rezultă : *B, O, D* sînt coliniare.

Notă : se pot calcula ușor $\widehat{B}, \widehat{D}$, sau $\widehat{BOD}$.

$\widehat{BOD} = 70° + 110° = 180°$ (unghi la centru), ceea ce este tot una cu aflarea sumei unghiurilor de aceeași parte a segmentelor *BO* și *OD*, rezultînd și în acest fel că punctele *B, O, D* sînt coliniare.

13. Bisectoarele într-un paralelogram

Duceți, într-un paralelogram, bisectoarele a două unghiuri alăturate și aflați unghiul format de ele ! Ce se întîmplă cînd duceți bisectoarele a două unghiuri opuse ?



Răspuns :

Știm că într-un paralelogram unghiurile opuse sînt egale, iar cele alăturate sînt suplementare ($\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$)

În triunghiul BMC avem :

$$\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{C}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$$

$\widehat{M}=180^\circ-\left(\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{C}}{2}\right)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$ (deci unghiul format de cele două bisectoare BM și CM este un unghi drept).

În triunghiul ANB (unghiurile $\widehat{A}$ și $\widehat{B}$ fiind alăturate) avem, în mod asemănător, $AN \perp NB$ ($\widehat{N}=90^\circ$).

Cum BMN este perpendicular atît pe CM, cît și pe AN, rezultă : $AN//MC$. Deci, bisectoarele a două unghiuri opuse, într-un paralelogram, sînt paralele (formează un unghi de 0°).

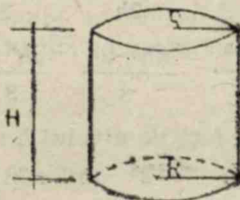
14. Cilindrul și conul

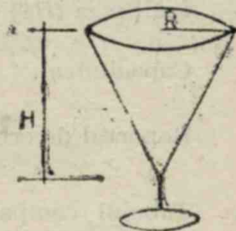
I) Doi amici beau nectar de fructe, din pahare care au aceeași înălțime și același diametru la partea superioară, însă unul din pahare are forma cilindrică, iar celălalt conică. De cîte ori trebuie să bea mai mult cel cu paharul conic, pentru a consuma o cantitate egală cu nectar ?

Răspuns :

Vol. cil. $=\pi R^2 \cdot H$

Vol. conului $=\frac{\pi R^2 \cdot H}{3}$





Raportul lor este 3. Deci dacă unul bea conținutul unui pahar de formă cilindrică, celălalt trebuie să bea conținutul a trei pahare conice (am considerat că paharele se umplu complet, sau la același nivel).

II) Luați aceleași pahare de la problema precedentă, considerați în plus $H=R$ și împărțiți înălțimea lor în trei părți egale h, astfel ca $h=\frac{H}{3}$

Umpleţi în prima fază paharele pînă la nivelul h, apoi la $2h$ şi în sîrşit, la $3h$ (pînă sus). Comparaţi modul de creştere al volumelor (capacităţilor) în cele două pahare !

Generalizaţi pentru cazul $h = \frac{H}{n}$

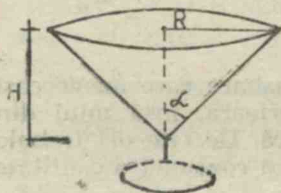
Răspuns :

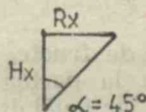
a) Paharul cilindric : înălţimea : h $2h$ $3h$ nh

capacitatea : v $2v$ $3v$ nv

Raportul de creştere faţă de nivelul h : 1 2 3 n.

Deci, o creştere liniară, direct proporţională cu h (rezultă uşor din formula volumului cilindrului !).





b) Paharul conic (Notăm Hx şi Rx, cele două dimensiuni la un nivel oarecare).

Vol. conului $= \frac{\pi R^2x\ Hx}{3} = \frac{\pi H^3x}{3}$ (am presupus $R = H$ adică $\alpha = 45°$ deci şi $Rx = Hx$, la orice nivel).

Înălţimea (Hx) :	h	$2h$	$3h$	nh
Capacitatea :	$\frac{\pi h^3}{3}$	$\frac{\pi h^3 \cdot 2^3}{3}$	$\frac{\pi h^3 \cdot 3^3}{3}$	$\frac{\pi h^3 \cdot n^3}{3}$

Raportul de creştere faţă de nivelul h :

1 2^3 3^3 n^3

Tabelul comparativ al creşterii capacităţilor (sau volumelor) :

	h	$2h$	$3h$	nh
— paharul cilindric	1	2	3	n
— paharul conic	1	2^3	3^3	n^3

Deci, în paharul conic, cu $H = R$, dacă dublăm coloana (înălţimea) lichidului, volumul creşte de 8 ori, dacă o triplăm acesta creşte de 27 ori ş.a.m.d.

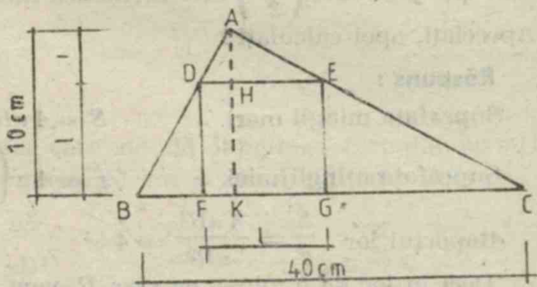
Față de creșterile liniare ale volumelor de la forma cilindrică, la paharul conic din problema noastră ($H=R$ sau $Hx=Rx$) creșterile sînt la cub.

15. Pătratul înscris într-un triunghi dreptunghic [+]

Se dă un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 40 cm și înălțimea corespunzătoare ei de 10 cm. Să se înscrie în acest triunghi un pătrat, care să aibă o latură pe ipotenuză și cîte un vîrf pe cele două catete. Să se calculeze latura pătratului.

Răspuns :

Problema este posibilă : o paralelă DE la ipotenuza BC poate fi translatată convenabil — mai sus sau mai jos — astfel încît DE să fie egală cu depărtarea punctelor D și E față de ipotenuza BC.



Cu notațiile din figură $DE//BC$ avem $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (teorema fundamentală a asemănării : o paralelă la o latură a unui triunghi, formează un triunghi asemenea cu cel dat). Deci, putem scrie proporționalitatea laturilor omoloage, respectiv a înălțimilor celor două triunghiuri.

(1) $$\frac{DE}{BC}=\frac{AH}{AK}$$

(unde DE = latura pătratului ,
$BC = 40$ *cm* ipotenuza) ;
AH = înălțimea $\triangle ADE$ corespunzătoare ipotenuzei DE ;
$AK = 10$ cm, înălțimea $\triangle ABC$ corespunzătoare ipotenuzei BC).
Înlocuim și avem :

(2) $$\frac{DE}{40}=\frac{AH}{10}=\frac{DE+AH}{50}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$$

(observați că $DE = DF = HK$ = lat pătratului și $DE + AH = HK + AH = AK = 10$ cm înălțimea $\triangle$ ABC).

(3) $DE = 40 \cdot \frac{1}{5} = 8$ (latura pătratului căutat).

(4) $AH = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$

16. Mingile de fotbal

Din materialul necesar confecționării unei mingi de formă sferică cu raza R, vrem să confecționăm mai multe mingi, mai mici, cu raza pe jumătate $\left(\frac{R}{2}\right)$ Cîte asemenea mingi putem confecționa ? Apreciați, apoi calculați !

Răspuns :

Suprafața mingii mari. $S = 4\pi R^2$

Suprafața mingii mici. $s = 4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = 4\pi\frac{R^2}{4} = \pi R^2$

Raportul lor $\frac{S}{s} = \frac{4\pi R^2}{\pi R^2} = 4$

Deci în loc de o minge cu raza R, vom putea confecționa 4 mingi cu raza $\frac{R}{2}$

17. Bilele de metal

Din 8 bile metalice (sferice) cu raza r, prin topire, vrem să facem o singură bilă (tot sferică). Ce rază va avea noua bilă în comparație cu razele celor 8 bile mai mici ? Apreciați de cîte ori va fi mai mare (raza sau diametrul), apoi calculați pentru a vă verifica !

Răspuns :

Bilele fiind făcute din același material, ne vom referi la raportul volumelor, egal cu cel al maselor.

Volumul celor 8 bile $V_1 = 8\,\frac{4\pi r^3}{3}$

Volumul bilei mari $V_2 = \frac{4\pi R^3}{3}$

Dar $V_1 \equiv V_2$. Egalînd expresiile de mai sus, rezultă :

$$\frac{8 \cdot 4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\frac{R^3}{r^3} = 8$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 = 2^3 ; \frac{R}{r} = 2 ; R = 2r.$$

Raza bilei mari va fi numai de două ori mai mare, decît raza uneia din cele opt bile !

18. Cercul

Unii elevi confundă formula care ne dă lungimea cercului cu aceea a ariei sale ! Să presupunem că nu e cazul nostru ! Deci :

$$L \text{ cerc} = 2\pi R = \pi D$$

$$S \text{ cerc} = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

(Trecerea de la formulele care conțin raza R, la cele care conțin diametrul D, este ușoară, ținînd seama că $D \equiv 2R$).

Pentru lungimea cercului nu avem probleme deosebite, dacă reținem că numărul π ($= 3{,}14159265$), ne arată de cîte ori se cuprinde diametrul cercului în lungimea sa.

Formula ariei cercului poate fi însă dedusă pornind de la lungimea lui. Sesizați cum ?

Răspuns :

Dacă împărțim S cerc la L cerc vom obține :

$$\frac{S \text{ cerc}}{L \text{ cerc}} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} \Rightarrow S \text{ cerc} = L \text{ cerc} \frac{R}{2} = 2\pi R \frac{R}{2} = \pi R^2$$

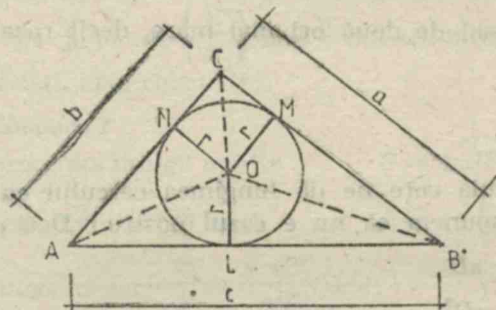
Observăm că aria cercului este egală cu lungimea sa, înmulțită cu raza și împărțită la 2, similar cu formula ariei triunghiului.

19. Cercul înscris într-un triunghi (I)

Se dă un triunghi oarecare ABC, cu laturile a, b, c. Să se afle raza cercului înscris în acest triunghi, în funcție de laturile acestuia.

Vă amintim că aria unui triunghi căruia îi cunoaștem laturile este $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde $p = \frac{a+b+c}{2}$ adică jumătate din perimetrul triunghiului.

Răspuns:



Laturile triunghiului vor fi tangente la cerc, iar razele cercului vor fi perpendiculare pe laturi în punctele de tangență.

Considerăm că am găsit centrul cercului și îl notăm cu O. Unim O cu vîrfurile triunghiului și s-au format trei triunghiuri, care se sprijină (au ca baze) pe laturile triunghiului ABC, un vîrf comun O și înălțimile egale $OL=OM=ON=r$. Suma suprafețelor acestor triunghiuri va fi egală cu suprafața $\triangle ABC$. Scriem acest lucru, notind pentru ușurință laturile triunghiului mare cu a, b, c, (ca în figură).

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} \quad \text{Dăm factor comun } \frac{r}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{r}{2}(a+b+c) \Rightarrow r = \frac{2\,S_{ABC}}{a+b+c} = \frac{2S_{ABC}}{2p} = \frac{S_{ABC}}{p} =$$

$$= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

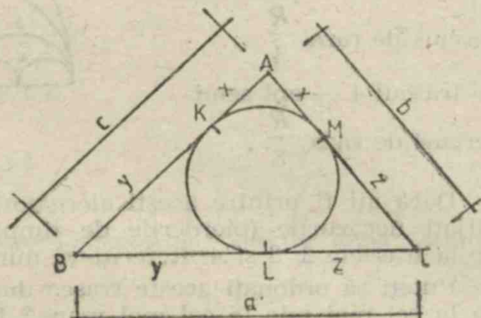
Notă: În cazul triunghiului echilateral ($a = b = c$).

$$r = \frac{S_{ABC}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)^3}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^3}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

20. Cercul înscris într-un triunghi (II)

Luaţi un triunghi oarecare ABC cu laturile a, b, c, și cercul înscris în el. Calculaţi în funcţie de a, b, c, distanţele punctelor de tangenţă K, L, M, de la vîrfurile triunghiului !

Răspuns :



Știm că cele două tangente dintr-un punct la un cerc sînt egale, deci $AK = AM = x$, $BK = BL = y$ și $CL = CM = z$.

Dar :
$$\begin{cases} x + y = c & (1) \\ y + z = a & (2) \\ z + x = b & (3) \end{cases}$$

Trei ecuaţii cu trei necunoscute, în fiecare ecuaţie lipsind cîte una din necunoscute.

Ec. (1) — (2), (3):
$$\begin{cases} x - z = c - a \\ x + z = b \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul, rezultă :
$$\begin{cases} x = \dfrac{-a + b + c}{2} \\ y = \dfrac{a - b + c}{2} \\ z = \dfrac{a + b - c}{2} \end{cases}$$

Notă : Observaţi modul în care apare semnul minus la numărător !

21. Cursa pe trasee diferite

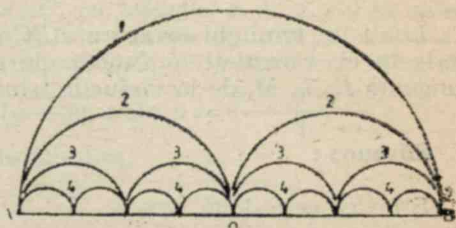
Patru copii trebuie să alerge de la A la B, pe cele patru trasee notate pe figură :

— traseul 1 — un semicerc cu raza R ;

— traseul 2 — două semicercuri de raza $\frac{R}{2}$

— traseul 3 — patru semicercuri de raza $\frac{R}{4}$

— traseul 4 — opt semicercuri de raza $\frac{R}{8}$.



Dacă aţi fi printre aceşti alergători, ce traseu v-aţi alege ? Neglijaţi necazurile (pierderile de timp) cu schimbările de direcţie de la traseele 2, 3 şi 4. Referiţi-vă numai la lungimile lor efective !

Puteţi să ordonaţi aceste trasee după mărimea lor, de exemplu, de la cel mai mic la cel mai mare ? Dar fără să calculaţi ! Calculele le veţi face, pentru verificare, numai după ce veţi clasifica lungimile traseelor, prin apreciere.

Generalizaţi problema !

Răspuns :

Aparent, clasificarea de la cel mai lung la cel mai scurt traseu este : 4, 3, 2, 1. Sînteţi de acord ?

Real lungimile celor patru trasee sînt egale :

$$T1 \equiv \pi R$$

$$T2 = 2 \cdot \frac{\pi R}{2} \equiv \pi R$$

$$T3 = 4 \cdot \frac{\pi R}{4} \equiv \pi R$$

$$T4 = 8 \cdot \frac{\pi R}{8} \equiv \pi R.$$

Fără îndoială, că în mod practic, este de preferat traseul 1, apoi 2 etc., tocmai din cauza schimbărilor de direcţie, la traseele 4 şi 3.

Generalizare pentru traseul Tn :

Lungimile razelor semicercurilor acestui traseu vor fi, după regula stabiltă mai sus $\frac{R}{2^{n-1}}$

Deci : $Tn \equiv 2^{n-1}\pi \frac{R}{2^{n-1}} \equiv \pi R$

22. Sfera

Vi se reamintesc formulele :

1) Aria sferei $= 4\pi R^2$

2) Volumul sferei $\equiv \frac{4\pi R^3}{3}$

Ce considerații puteți face pe marginea acestor două formule ?

Răspuns :

1) Aria sferei este egală cu patru arii ale cercului mare al acestei sferei. Deci pentru a acoperi cu hîrtie un glob sferic, vom avea nevoie de patru cercuri de hîrtie sau alt material, cu razele egale cu raza sferei.

2) Volumul sferei are o formulă identică cu volumul unui con $\left(\frac{\textit{aria bazei} \times \textit{înălțimea}}{3}\right)$, sau al sectorului sferic.

Cum aria sferei (luată ca bază) este $4\pi R^2$, iar înălțimea o considerăm raza sferei (de la bază, la un vîrf care e centrul sferei, către care converg toate aceste corpuri conice cu bazele pe aria sferei), vom avea :

$$\text{Vol. sferei} = \frac{\text{aria sferei} \times \text{înălțimea}}{3} = \frac{4\pi R^2 \cdot R}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Notă : Considerațiile de mai sus ajută foarte mult pe cei care nu rețin cele două formule.

23. Sfera inscrisă în tetraedru [+]

Vi se dă un tetraedru la care cunoaștem volumul și aria totală. Înscrieți în el o sferă și aflați-i raza !

Indicații : Tetraedrul este corpul cu patru fețe, respectiv piramida triunghiulară, care poate fi regulată (fețele sînt triunghiuri echilaterale) sau neregulată (fețele sînt triunghiuri oarecare).

Răspuns :

(Pentru cazul general al piramidei triunghiulare neregulate).

Considerăm O centrul sferei înscrise. Depărtările de la O la cele patru fețe sînt perpendicularele din O pe fiecare față și reprezintă în același timp razele sferei (R).

Dacă unim centrul sferei, cu vîrfurile tetraedrului sau piramidei, obținem patru piramide, avînd ca vîrf punctul O., ca baze fețele corpului, iar ca înălțimi razele sferei (R).

Suma acestor patru volume este egală cu volumul corpului dat inițial. Deci :

(1) $$\frac{R \cdot S_1}{3} + \frac{R \cdot S_2}{3} + \frac{R \cdot S_3}{3} + \frac{R \cdot S_4}{3} = V \text{ corp (tetraedru).}$$

Am notat cu $S1$, $S2$, $S3$, $S4$ ariile fețelor tetraedrului, pentru cazul general al piramidei triunghiulare neregulate (tetraedru neregulat), iar cu V volumul tetraedrului (corpului).

Dăm factor comun $\frac{R}{3}$ și avem :

(2) $$\frac{R}{3}(S1 + S2 + S3 + S4) = V$$

$$R = \frac{3V}{S1 + S2 + S3 + S4} = \frac{3V}{\text{aria totală}}$$

În consecință am putut determina raza R a sferei înscrise în tetraedru, cunoscînd volumul V și aria totală a tetraedrului.

Notă : Pentru cazul tetraedrului regulat $S1 = S2 = S3 = S4$, rezolvarea este identică și $R = \frac{3V}{4S}$ (S = aria unei fețe).

24. Scoțianul și topometrul (I) [+]

Un scoțian emigrează în America secolului al 18-lea. El defrișează o suprafață de pădure, pentru a o transforma în teren arabil, dar neavînd instrumente și cunoștințe topografice, îi rezultă o su-

prafață de forma unui patrulater neregulat. După o perioadă de timp el vrea să-și dubleze suprafața arabilă, dar autoritățile locale — care între timp luaseră ființă — îi impun condiția ca în final suprafața defrișată să aibă laturile paralele.

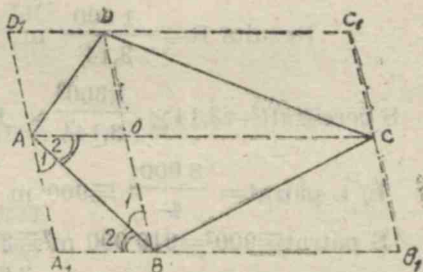
Cum procedează scoțianul pentru a respecta cele două deziderate :

1) dublarea suprafeței ;

2) obținerea unui teren în formă de paralelogram.

Răspuns :

El apelează la un topometru, care trasează diagonalele patrulaterului inițial, apoi — prin vîrfurile acestuia — duce paralele la diagonale (urmăriți figura :



$D_1C_1 \parallel AC$; $A_1B_1 \parallel AC$;

$A_1D_1 \parallel BD$; $B_1C_1 \parallel DB$)

Se observă ușor egalitatea (congruența) perechilor de triunghiuri, care au cîte o latură comună și unghiurile egale :

$\triangle AA_1B = \triangle ABO$ (AB comun ; $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$; $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$ alterne interne)

$\triangle BB_1C = \triangle COB$ (CB comun ; etc. ...)

$\triangle CC_1D = \triangle DOC$

$\triangle DD_1A = \triangle AOD$

Suprafața rezultată $A_1B_1C_1D_1$ este un paralelogram și este strict de două ori mai mare decît aceea a patrulaterului ABCD.

25. De la perimetru la suprafață

În timpul colonizării Americii de Nord, autoritățile unei regiuni — care mai tîrziu avea să devină statul Detroit — au hotărît ca fiecare colonist să ocupe un teren al cărui perimetru să fie maximum 3 600 m, iar forma terenului să fie triunghi echilateral, pătrat sau cerc. Care din figurile geometrice arătate mai sus, trebuia să și-o aleagă acești oameni, pentru a ocupa o suprafață cît mai

mare? Respectînd condiția ca perimetrul figurilor geometrice (sau lungimea cercului) să fie constant, încercați o clasificare a celor trei figuri geometrice, în funcție de mărimea suprafeței pe care o delimitează.

Faceți mai întîi o clasificare pe bază de apreciere, apoi apelați la calcule!

Răspuns:

1) Clasificarea cerută este: cerc, pătrat, triunghi echilateral.

2) a) L cerc $= 3\,600$ m $= 2\pi R$

Rezultă $R = \dfrac{1\,800}{3,14}$ m

$$S \text{ cerc} = \pi R^2 = 3,14 \times \frac{1\,800^2}{3,14^2} \simeq 1\,031\,800 \text{ m}^2 \simeq 103 \text{ ha}$$

b) $L \text{ pătrat} = \dfrac{3\,600}{4} = 900$ m

$S \text{ pătrat} = 900^2 = 810\,000 \text{ m}^2 = 81$ ha

c) $L \text{ triunghi echilateral} = \dfrac{3\,600}{3} = 1\,200$ m

$$h \text{ triunghi echilateral} = \frac{\sqrt{3} \times 1\,200}{2} \simeq 1\,038 \text{ m}$$

$$S \text{ triunghi echilateral} = \frac{1\,200 \times 1\,038}{3} = 622\,800 \text{ m}^2 \simeq 62 \text{ ha}$$

Recapitulînd suprafețele obținute, avem:

S cerc $\simeq$ 103 ha
S pătrat $=$ 81 ha
S tr. echilateral $\simeq$ 62 ha

26. În legătură cu teorema fundamentală a asemănării

Luați un triunghi oarecare ABC, pe latura BC punctul M și duceți paralelele:

MP // CA
MN // BA

Demonstrați că următoarea relație este corectă :

$$\frac{NC}{AC} + \frac{PB}{AB} = 1$$

Rezolvare :

Faceți singuri figura și observați că :

MN//BA ⟹ △CNM ∼ △CAB (teorema fundamentală a asemănării).

Din asemănarea celor două triunghiuri putem scrie :

$$(1) \quad \frac{NC}{AC} = \frac{MC}{BC}$$

În continuare :

PM // AC ⟹ △ BMP ∼ △ BCA (idem ca mai sus)

Rezultă :

$$(2) \quad \frac{PB}{AB} = \frac{BM}{BC}$$

Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem :

$$\frac{NC}{AC} + \frac{PB}{AB} = \frac{MC}{BC} + \frac{BM}{BC} = \frac{MC+BM}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

Ceea ce era de demonstrat !

27. Conul și trunchiul de con cu volume egale

Considerați că cele două corpuri geometrice au aceeași înălțime I și în plus razele cercurilor de bază ale trunchiului de con sînt egale cu 3 și 5.

Calculați ce rază trebuie să aibă baza conului pentru ca — conform titlului — volumele corpurilor să fie egale !

Vi se reamintește că :

Volumul conului $Vc = \frac{\pi x^2 \cdot I}{3}$ (în care x = raza bazei).

Volumul trunchiului de con $Vtc = \frac{\pi I\,(R^2 + r^2 + Rr)}{3}$

Cu datele din problemă:

$$Vtc = \frac{\pi \cdot I}{3} \cdot 49$$

Egalînd cele două volume, avem:

$$\frac{\pi x^2 I}{3} = \frac{\pi I}{3} \cdot 49$$

$$x^2 = 49$$

$$x = 7\text{cm}.$$

Notă: Observaţi progresia aritmetică 3 ; 5 ; 7 ; pe care o formează razele trunchiului de con (3 şi 5) şi raza conului (7).

28. Tot despre con

Luaţi un con drept cu raza R şi înălţimea I. Secţionaţi-l la mijlocul înălţimii cu un plan paralel cu baza şi construiţi un alt con cu vîrful în centrul bazei primului con şi baza la mijlocul înălţimii acestuia.

Aflaţi raportul celor două volume. Mai întîi apreciaţi acest raport şi apoi calculaţi-l!

Răspuns 1:

În formula pentru determinarea volumului conului mic în comparaţie cu aceea a conului mare, raza (la pătrat) este jumătate din raza conului mare, deci volumul va scădea cu pătratul lui 2, adică de patru ori. În plus, în aceeaşi formulă, înălţimea conului mic este de două ori mai mică decît a conului mare, deci volumul conului mic va fi de încă două ori mai mic, adică în total de opt ori mai mic ($2 \times 4 = 8$), decît volumul conului mare.

Prin aprecierea făcută iniţial, v-aţi apropiat de acest raport?

Răspuns 2:

Făcînd raportul dintre cele două volume, avem:

$$\frac{\text{Volum con mare}}{\text{Volum con mic}} = \frac{\dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot I}{3}}{\dfrac{\pi \cdot \dfrac{R^2}{4} \cdot \dfrac{I}{2}}{3}} = 8$$

Notă : Dacă ați desenat figura cerută prin problemă, ați putut desigur observa egalitatea celor două conuri mici, care au o bază comună (cercul format la mijlocul conului mare). În acest fel ați putut deduce și faptul că volumul trunchiului de con este de șapte ori mai mare decît volumul unui con mic.

29. De la sectorul de cerc la con

Tăiați dintr-un carton subțire un cerc cu raza *R*, iar din acesta decupați și îndepărtați un sector de cerc ; va rămîne astfel tot un sector de cerc, pe care îl vom folosi în continuare.

Imaginați-vă (sau încercați să realizați practic) că ridicați sectorul de cerc rămas, din punctul O (centrul cercului) pe aceeași verticală, pînă cînd cele două raze pe care am aplicat tăieturile se unesc. Am obținut astfel (aceasta fiind una din metode) un con deci un corp geometric, dintr-o suprafață plană (sectorul circular). Evident, că și din celălalt sector de cerc, pe care l-am lăsat deoparte, se putea obține un con.

Va trebui să observați că :

— la limită, cercul este un con cu înălțimea egală cu zero ($I = 0$), sau care tinde către zero, avînd ca bază cercul însuși. Și invers : un segment de dreaptă vertical e un con format dintr-un sector de cerc cu suprafața egală cu zero.

— suma suprafețelor laterale ale celor două conuri, care se puteau obține ca mai sus, este egală cu suma suprafețelor sectoarelor de cerc din care provin și deci cu suprafața cercului inițial de rază *R* ;

— dintr-un sector de cerc cu suprafață mică se poate obține, prin metoda expusă, un con cu înălțimea mare (care tinde către *R*) și suprafața bazei mică. Și invers !

— un con se mai poate obține și prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul uneia dintre catetele sale.

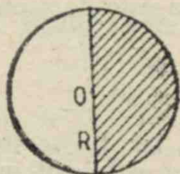
Și acum problema !

Dacă din cercul inițial luăm un sector de cerc egal cu jumătatea cercului, aflați cît este raza bazei conului ce se obține din acest sector de cerc. Puteți găsi o legătură între razele bazelor conurilor ce se obțin ca mai sus și razele cercurilor inițiale ?

Răspuns :

Notăm cu *R* raza cercului inițial, pe care îl tăiem în două părți egale. Dintr-unul din acestea construim un con cu raza bazei *r*

și generatoarea $G = R$, a cărei suprafață laterală va fi egală cu jumătate din suprafața cercului, deci:

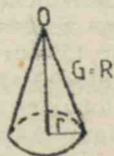


$$\pi r G = \frac{\pi R^2}{2}$$

Deoarece $G = R$, rezultă:

$$r = \frac{R}{2}$$

Adică raza bazei conului este egală cu jumătatea razei cercului inițial (din care provine).



Pentru cazul general, vom considera că sectorul circular — din care rezultă conul — este o parte din suprafața cercului de bază adică:

$$\pi r G = \frac{1}{n}\pi R^2$$

dar $G = R$

$$r = \frac{R}{n}$$

Deci, raza bazei conului (r), față de raza cercului inițial (R), este în același raport, în care se află suprafața sectorului circular, față de suprafața cercului inițial.

Notă: O serie de probleme — considerate dificile — se rezolvă pornind de la egalitatea dintre suprafața sectorului de cerc și suprafața laterală a conului obținut din acesta; sau de la egalitatea dintre lungimea sectorului circular și lungimea cercului de bază al conului obținut. În plus observați că avînd pe r și G, putem determina unghiul de la vîrful conului.

30. Mai multe sectoare de cerc... mai multe conuri [—]

După ce au rezolvat problema anterioară și au înțeles-o bine, mai mulți copii se joacă: ei iau un cerc (tot din carton) și-l împart în șapte sectoare circulare inegale; după aceea construiesc din fiecare sector circular cîte un con, care — așa cum ușor vă puteți imagina — nu au bază (cercul de bază).

Acest inconvenient însă nu impiedică pe elevi de a le așeza pe o masă, în poziție verticală și nici pe cel mai isteț dintre ei, de

a pune o întrebare de „nota zece" : „Cu cît este egală suma suprafețelor laterale ale celor șapte conuri" ?

După cîteva secunde de gîndire, vreo doi-trei, de asemenea „isteți foc", răspund în cor...

Vă asigurăm că răspunsul lor a fost corect !

Puteți să-l formulați și dumneavoastră ?

Răspuns :

În speranța că întîi ați dat răspunsul corect și apoi ați continuat lectura, vă redăm răspunsul elevilor : „suma suprafețelor laterale ale celor șapte conuri este egală cu suprafața cercului inițial (din care s-au tăiat cele șapte sectoare de cerc, respectiv s-au confecționat cele șapte conuri).

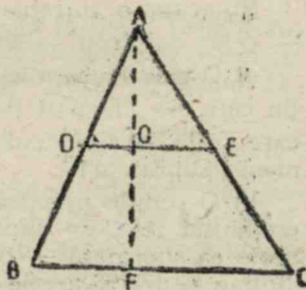
31. O problemă simplă [—]

Doi frați moștenesc o livadă sub forma unui triunghi. Pentru a o împărți „frățește", cel mai mare măsoară înălțimea triunghiului, o taie în două, duce o paralelă la baza triunghiului și îi oferă celui mic triunghiul din vîrf, el mulțumindu-se cu trapezul format pe baza triunghiului inițial.

Evident, împărțeala nu este justă ! De aceea, sînteți invitați să răspundeți de cîte ori este mai mare suprafața pe care și-a rezervat-o fratele mare, față de aceea pe care a oferit-o celui mai mic.

Răspuns :

Procedînd conform celor arătate prin text, fratele mai mare nu a făcut altceva decît să ducă linia mijlocie DE a laturilor AB și AC (a se vedea figura alăturată). Vă reamintim o proprietate a triunghiurilor : într-un triunghi, dreapta care unește mijloacele a două laturi este paralelă cu a treia și egală cu jumătatea ei.



Vom nota $AO \equiv OF \equiv h$

$$DE \equiv \frac{BC}{2} \equiv b$$

$$\text{Aria } ADE = \frac{bh}{2}$$

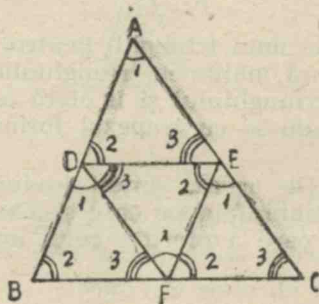
$$\text{Aria } DECB \equiv \frac{2b+b}{2} \cdot h \equiv \frac{3bh}{2}$$

$$\text{Raportul ariilor } \frac{DECB}{ADE} = \frac{\frac{3bh}{2}}{\frac{bh}{2}} \equiv 3$$

Deci, suprafaţa de teren pe care şi-a rezervat-o fratele mai mare este triplă faţă de aceea oferită fratelui mai mic.

Sau : În acelaşi triunghi ABC (figura alăturată) unim mijloacele laturilor şi vom obţine cele trei linii mijlocii

$$DE//BC\ ;\ DF//AC\ ;\ FE//AB$$



Am împărţit astfel trapezul $DECB$ în trei triunghiuri DBF ; DFE ; EFC egale între ele şi egale cu triunghiul ADE. Dacă nu sînt evidente aceste egalităţi, va trebui să observaţi egalitatea unghiurilor din cele patru triunghiuri (notate pe figură), precum şi egalitatea laturilor acestor triunghiuri

$$EF = AD = DB\ ;\ DE = BF = FC\ ;\ DF = CE = EA.$$

Notă : procedînd ca mai sus, putem să împărţim orice triunghi în patru triunghiuri egale între ele (congruente).

Şi acum o întrebare suplimentară : puteţi să le împărţiţi dv. — celor doi fraţi — livada (triunghiul) în două părţi strict egale ?

a) O soluţie nepractică : din cele patru triunghiuri de mai sus (în care s-a împărţit triunghiul mare ABC — respectiv livada) fiecare frate ia cîte două. Vedeţi, că nu sînt uşor de exploatat asemenea suprafeţe !

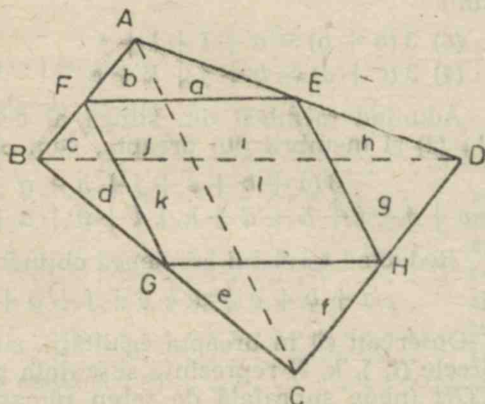
b) O soluţie practică şi uşor de realizat : din oricare vîrf al triunghiului ABC se duce mediana ; se obţin astfel două triunghiuri egale ca suprafaţă — congruente — care au bazele egale (jumătate dintr-o latură) şi aceeaşi înălţime.

32. Scoţianul şi topometrul (II) [+]

În condiţiile de la problema 24 a acestui capitol, scoţianului i se impune să reducă la jumătate suprafaţa ocupată de el, menţinîndu-se obligaţia ca terenul astfel rezultat să aibă laturile paralele. Cum procedează chinuitul nostru scoţian ?

Răspuns :

Acelaşi topometru, care era şi un bun geometru, a procedat astfel :



— a notat cu *A, B, C, D*, vîrfurile patrulaterului neregulat (iniţial) ;

— a măsurat şi a materializat pe teren mijloacele *E, F, G, H* ale celor patru laturi ;

— a dus — pe planşeta sa — diagonalele *AC* şi *BD* ale patrulaterului şi liniile mijlocii *EF ; FG ; GH ; HE ;*

— a notat — ca în figura noastră — toate ariile parcelelor rezultate din desenul său — cu litere mici (a, b, c... l) ;

— a afirmat că patrulaterul *EFGH*, rezultat prin unirea mijloacelor laturilor primului partulater, este un paralelogram a cărui arie este jumătate din aria *ABCD*, adică îndeplineşte cele două condiţii impuse de autorităţile americane.

Iată cum a demonstrat el !

În triunghiul *ABD*, segmentul *FE* este linie mijlocie (prin construcţie) şi deci $FE // BD$; iar suprafeţele $(a + b)$ reprezintă o treime din suma suprafeţelor $(c + j + i + h)$. A se vedea problema 31. Deci :

(1) $3(a + b) = c + j + i + h$

În triunghiul *CBD* segmentul *GH* e linie mijlocie şi deci $GH // BD$. Cum anterior stabilisem că $FE // BD$, rezultă $GH // FE$, deci cele două laturi ale noului patrulater sînt paralele. În plus şi în acest triunghi *CBD* putem stabili relaţia dintre suprafeţele parcelelor :

(2) $3(e + f) = d + k + l + g$

Procedînd în mod asemănător cu triunghiurile *DAC* (linie mijlocie *EH*) și *BAC* (linie mijlocie *FG*), vom ajunge la concluzia că $EH // AC$ și $FG // AC$, de unde $EH // FG$, adică și celelalte două laturi ale noului patrulater sînt paralele, deci *EFGH* este un paralelogram, îndeplinindu-se astfel condiția ca noua suprafață de teren să aibă această formă. În plus și în aceste triunghiuri *DAC* și *BAC* putem scrie relațiile dintre suprafețele parcelelor ce le compun :

(3) $3(h+g) \equiv a+i+l+f$
(4) $3(c+d) \equiv b+j+k+e$

Adunînd membrii din stînga ai celor patru egalități (1) ; (2) ; (3) ; (4) și membrii din dreapta, vom obține tot o egalitate, astfel :

$$3(a+b+e+f+h+g+c+d) \equiv$$
$$= c+j+i+h+d+k+l+g+a+i+l+f+b+j+k+e$$

: Reducînd termenii asemenea obținem :

$$a+b+c+d+e+f+g+h \equiv i+j+k+l$$

Observați că în dreapta egalității, suma suprafețelor celor patru parcele *(i, j, k, l)* reprezintă suprafața paralelogramului nou format *EFGH* (noua suprafață de teren rămasă în stăpînirea scoțianului), care este egală cu suma suprafețelor din stînga egalității, reprezentînd suprafața de teren la care scoțianul este obligat să renunțe (diferența dintre aria patrulaterului inițial *ABCD* și aria paralelogramului *EFGH*). în acest fel a rezultat că și cealaltă condiție impusă (noua suprafață să fie jumătate din aceea inițială) a fost realizată, adică :

$$\frac{1}{2}\text{Aria } ABCD \equiv \text{Aria } EFGH$$

TABLA DE MATERII

CAPITOLUL I

Probleme diverse

CAPITOLUL II

Aritmetică — algebră

CAPITOLUL III

Geometrie

Redactor : VICENȚIU DONOSE
Tehnoredactor : MIHAI BUJDEI

Apărut 1985. Format 61×86/16. Coli tipo 13,5.
Bun de tipar la 26.VIII.1985.
Editura Junimea, str. Gheorghi Dimitrov, nr. 1.
IAȘI – ROMÂNIA

Tipărit sub cd. nr. 5131/1985, la
INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ BACĂU,
Str. Mioriței, nr. 27.

Lei 7,25